

THEORIE DES JEUX

C'est quoi?

- **C'est une branche des mathématiques?**
- **C'est une philosophie des sciences?**
- **C'est un outil incontournable de l'analyse moderne de l'évolution des espèces?**
- **C'est le noyau dur de la « science » économique?**
- **C'est une arme stratégique dans les conflits militaires?**
- **C'est un instrument machiavélique destiné à justifier les comportements cyniques et immoraux?**

THEORIE DES JEUX

- **Objectifs de la théorie des jeux selon John von Newmann (Mathématicien) et Oskar Morgenstern(économiste)**
- « Nous souhaitons mettre au jour les principes mathématiques complets qui définissent « le comportement rationnel » des participants d'une économie sociale, et en déduire les caractéristiques d'un tel comportement. Et, tandis que les principes pourraient être très généraux –i.e., validés dans toutes les situations- nous serons satisfaits si nous pouvons trouver des solutions qui, pour le moment, ne valent que pour certains cas particuliers représentatifs. »

Quel ambitieux programme!!!

THEORIE DES JEUX

plusieurs fois récompensée(1/3)

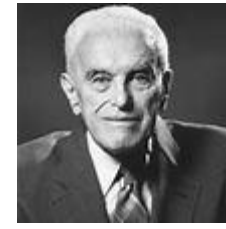
- Le prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel, surnommé « prix Nobel d'économie » crée en 1969 a récompensé à plusieurs reprises les travaux sur la THEORIE DES JEUX.

- **En 1994:**

John Forbes NASH(US)

Reinhard SELTEN(US)

John HARSANYI(US)



- o **En 2005:**

Robert AUMAN(IR)

Thomas SCHELLING(US)



THEORIE DES JEUX

plusieurs fois récompensée(2/3)

- **En 2007:**

Léonid HURWICZ(US)

Eric MASKIN(US)

Robert MEYERSON(US)



- o **En 2012:**

Alvin ROTH(US)

Lloyd SHAPLEY(US)



THEORIE DES JEUX

Plusieurs fois récompensée(3/3)

- Pas de Prix « NOBEL pour ceux qui ont posé les fondements de la théorie des jeux moderne
- Von NEWMAN(Mort le 8 Février 1957 à 53 ans) et Oskar MORGENSTERN(Mort le 26 Juillet 1977; la théorie des jeux n'était pas encore reconnue! Elle ne le fut qu'en 1994)



- mentionnons que notre prix Nobel 2014 **Jean Tirole** a publié un important livre sur la théorie des jeux en anglais avec Drew Fudenberg en 2005
- Mentionnons également que le célèbre **Varoufakis** aussi a publié des livres sur la théorie des jeux en 2001

THEORIE DES JEUX

- **Robert AUMAN.....prix « Nobel » en 2005 et personnage très religieux affirme qu'il y a une MISHNA dans le TALMUD qui décrit apparemment un dilemme .**
 - **Un homme meurt, il doit respectivement 100,200 et 300 UC à trois créanciers mais sa succession est inférieure à 600UC**
 - **Comment répartir la succession S du défunt entre les trois créanciers**
- **Les rabbins dans la Mishna préconisent la répartition suivante selon le montant de la succession S**

S \ C	C		
	100	200	300
100	33,33	33,33	33,33
200	50	75	75
300	50	100	150

- **AUMAN dans un article en 1985 résous ce dilemme par les règles d'un jeu coopératif et donna le partage pour des successions allant de 0! À 600 UC.**

DEFINITIONS(1/4)

- **La théorie des jeux:** "the study of mathematical models of conflict and cooperation between intelligent rational decision-makers
- Un "**jeu**" est une situation où des joueurs rationnels sont conduits à **faire des choix stratégiques parmi un certain nombre d'actions possibles**, et dans un **cadre défini à l'avance** qui sera les "**règles du jeu**", le résultat de ces choix constituant une "issue du jeu", à laquelle est associé un "**gain**" (ou paiement), positif ou négatif, pour chacun des participants
le « gain » résulte en fait de la « subjective expected utility » de chacun des joueurs

DEFINITIONS(2/4)

La théorie des jeux classifie les jeux en catégories en fonction de leurs approches de résolution

Les « jeux coopératifs »

un jeu est dit coopératif lorsque les joueurs peuvent communiquer librement entre eux et passer des accords (par ex. sous forme d'un contrat). Ils forment alors une coalition et recherchent l'intérêt général suivi d'un partage des gains entre tous les joueurs.

Les « jeux non coopératifs »

Dans un jeu non coopératif, les joueurs (qui ne communiquent pas ou ne peuvent pas communiquer entre eux) agissent selon le principe de rationalité économique: chacun cherche à prendre les meilleures décisions pour lui-même (**c'est à dire cherche à maximiser égoïstement ses gains individuels**).

DEFINITIONS(3/4)

- Dans ce bref exposé, nous nous intéresserons qu'aux jeux non coopératifs où
 - Le nombre de joueurs **N est fini**
 - Le nombre de **choix(stratégies)** de chaque joueur est fini
 - Chaque joueur connaît l'ensemble de ses choix ainsi que ceux de ses « adversaires »
 - Les joueurs jouent simultanément (on dit que le jeu est à information imparfaite).
 - On ne traitera pas plusieurs autres cas dont celui où les joueurs jouent séquentiellement (on n'aura pas le temps, il fallait faire des choix!!!)

DEFINITIONS(4/4)

Conditions nécessaires pour lire un livre sur la théorie des jeux

Un stylo et du papier pour prendre des notes

Une propension à débattre des notions épistémiques et axiomatiques

Une appétence pour les quantificateurs universels($\exists$; $\forall$), les notations i, j et leurs sommations Σ , les relations d'ordre,

Les probabilités simples et conditionnelles

.....

Mais rassurons nous, cet exposé ne fera pas appel aux mathématiques ne serait-ce que pour éviter les remarques des spécialistes!!!!

EQUILIBRE DE NASH

exemple1(1/1)

		Bob	
		N(noir)	R(rouge)
Alice	N(noir)	7;3	7;4
	R(rouge)	3;4	10;5

- Quelle es l'issue probable de ce jeu?
- Encore faut il définir un critère
- Le « bon critère » est celui d'absence de regret (ou mieux l'optimisation de la « subjective expected utility

- Si Alice joue **Noir**, Bob n'a pas intérêt à jouer Noir; Bob a intérêt à jouer **Rouge** pour avoir une utilité de 4 plutôt que 3
- Mais alors Alice voyant qu'elle pourrait dans ce cas avoir une utilité de 10 en jouant **Rouge**, a intérêt à jouer **Rouge**
- Donc dans ce cas ni Alice, ni Bob n'auront aucun regret en jouant (**R;R**)

DE MÊME

- En examinant tous les cas on trouvera que la solution (**R;R**) est la solution où Alice et Bob n'éprouvent aucun regret en jouant (**R;R**)
- ((le résultat (**R;R**) de jeu « constitue un équilibre dit de NASH; ni Alice, ni Bob n'ont intérêt à dévier unilatéralement de ce leur choix

EQUILIBRE DE NASH

exemple2(1/3)

		Bob	
		G	D
Alice	G	1;0	0;1
	D	0;1	1;0

QUELLE EST LA SOLUTION DE CE JEU?

- Si Alice joue **G**; Bob a intérêt à jouer **D**; et Alice aura une utilité de 0
- mais alors Alice voyant qu'elle pourrait dans ce cas avoir une utilité de 1 plutôt que 0 en jouant **D** a intérêt à jouer **D**
- mais alors Bob voyant qu'il pourrait avoir une utilité de 1 plutôt que 0 en jouant **D** a intérêt à jouer **G**
- Mais alors Alice voyant que.....on tourne en rond ;
- on n'arrive pas à trouver une solution selon les critères que nous avons défini ,à ce jeu

Et pourtant NASH dit que tout jeu fini possède au moins une solution (équilibre) selon les critères que nous avons défini

Nous avons omis dans l'énoncé de NASH la notion de **stratégie mixte**

EQUILIBRE DE NASH exemple2(2/3)

qu'est-ce qu'une stratégie mixte?

		Bob	
		p	1-p
		G	D
Alice	q	G	1;0
	1-q	D	0;1

Définition: Une stratégie mixte d'un joueur est une **distribution de probabilité** sur l'ensemble de ses stratégies pures

Quelle est alors la solution de ce jeu? (avec les critères définis)

Quand Bob joue sa stratégie mixte, l'utilité d'Alice est

- $1p+0(1-p)=p$ si elle joue **G**
- $0p+1(1-p)=1-p$ si elle joue **D**
- Bien entendu, Bob rend Alice indifférente à ses deux choix, sinon elle choisirait sa stratégie pure lui procurant

la plus grande utilité

Donc, $p=1-p$ soit $p=1/2$

Quand Alice joue sa stratégie mixte, l'utilité de Bob est:

- $0q+1(1-q)=1-q$ si il joue **G**
- $1q+0(1-q)=q$ si il joue **D**
- Bien entendu Alice rend Bob indifférent sinon il choisirait sa stratégie pure lui procurant la plus grande utilité
- Donc $1-q=q$ soit $q=1/2$

EQUILIBRE DE NASH exemple2(3/3)

qu'est-ce qu'une stratégie mixte?

		Bob	
		1/2	1/2
		G	D
Alice	1/2	G	1;0
	1/2	D	0;1

À l'équilibre , l'utilité

▪ d'Alice est $1(1/2)+0(1/2)=1/2$

▪ De Bob est: $0(1/2)+1(1/2)= 1/2$

•NASH a établi que tout jeu fini a au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes

Comment interpréter une stratégie mixte d'un joueur?

Très schématiquement, la stratégie mixte peut être considérée comme le comportement moyen

d'une grande population de joueurs qui seraient confrontés au jeu.

Les probabilités définissant la stratégie mixte correspondent aux probabilités qu'un individu choisi

au hasard dans la population opte pour les différentes stratégies pures qui lui sont proposées. On peut aussi interpréter les stratégies mixtes comme des **croyances sur le comportement de l'adversaire** plutôt que comme des loteries(probabilités)

EQUILIBRE DE NASH

exemple3(1/3)

		Bob	
		P(pile)	F(face)
Alice	P(pile)	1;-1	-1;1
	F(face)	-1;1	1;-1

Ce jeu est dénommé le jeu des matching pennies

C'est un jeu à somme nulle,

le gain de l'un est égal à la perte de l'autre

C'est un jeu de conflit pur

Quand on dit que la vie n'est pas un jeu à somme nulle,

ça ne dit rien d'autre que dans la vie réelle,

Il n'existe pas de situations de conflits purs

QUELLE EST LA SOLUTION DE CE JEU?

- Si Alice joue **Pile**; Bob a intérêt à jouer **Face**;
- mais alors Alice voyant qu'elle pourrait dans ce cas avoir une utilité de 1 plutôt que -1 en jouant **Face** a intérêt à jouer **Face**
- mais alors Bob voyant qu'il pourrait avoir une utilité de 1 plutôt que -1 en jouant **Face** a intérêt à jouer **Face**
- Mais alors Alice voyant que.....on tourne en rond ;
- on n'arrive pas à trouver une solution selon les critères que nous avons défini ,à ce jeu

Et pourtant NASH dit que tout jeu fini possède au moins une solution (équilibre) selon les critères que nous avons défini

Nous avons omis dans l'énoncé de NASH la notion de **stratégie mixte**

EQUILIBRE DE NASH exemple3(2/3)

qu'est-ce qu'une stratégie mixte?

		Bob	
		p	1-p
		P(pair)	I(impair)
Alice	q	P(pair)	-2;2
	1-q	I(impair)	1;-1

Définition: Une stratégie mixte d'un joueur est une **distribution de probabilité** sur l'ensemble de ses stratégies pures

Quelle est alors la solution de ce jeu? (avec les critères définis)

Quand Bob joue sa stratégie mixte, l'utilité d'Alice est

- $-2p+1(1-p)=1-3p$, si elle joue **P(pair)** ,
- $1p+(-1)(1-p)= 2p-1$ si elle joue **I(impair)**,
- Bien entendu, Bob rend Alice indifférente à ses deux choix, sinon elle choisirait sa stratégie pure lui procurant la plus grande utilité

Donc, $1-3p=2p-1$ soit $p=2/5$

Quand Alice joue sa stratégie mixte, l'utilité de Bob est:

- $2q+(-1)(1-q)= 3q-1$ si il joue **P(pair)**
- $(-1)q+1(1-q) =1-2q$ si il joue **I(impair)**
- Bien entendu Alice rend Bob indifférent sinon il choisirait sa stratégie pure lui procurant la plus grande utilité
- Donc $3q-1= 1-2q$ soit $q=2/5$

EQUILIBRE DE NASH exemple3(3/3)

qu'est-ce qu'une stratégie mixte?

		Bob	
		2/5	3/5
		P(pair)	I(impair)
Alice	2/5	P(pair)	-2;2
	3/5	I(impair)	1;-1

À l'équilibre , l'utilité

- d'Alice est $(-2)(2/5) + 1(3/5) = -1/5$
- De Bob est: $2(2/5) + (-1)(3/5) = 1/5$

•NASH a établi que tout jeu fini a au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes

Comment interpréter une stratégie mixte d'un joueur?

Très schématiquement, la stratégie mixte peut être considérée comme le comportement moyen

d'une grande population de joueurs qui seraient confrontés au jeu.

Les probabilités définissant la stratégie mixte correspondent aux probabilités qu'un individu choisi

au hasard dans la population opte pour les différentes stratégies pures qui lui sont proposées. On peut aussi interpréter les stratégies mixtes comme des **croyances sur le comportement de l'adversaire** plutôt que comme des loteries(probabilités)

EQUILIBRE DE NASH

EXEMPLES

Avant d'étudier le DILEMME DU PRISONNIER,

On va considérer des exemples de jeux;

indiquer les applications qu'ils illustrent

et citer quelques méthodes pour trouver le ou les équilibres de NASH de ces jeux

RECHERCHE DE L'EQUILIBRE DE NASH / STRATEGIES MAXIMIN/MINIMAX

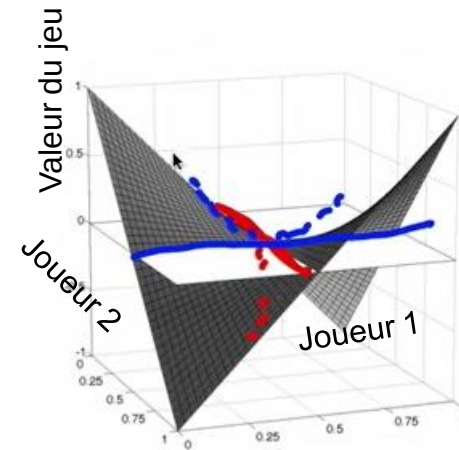
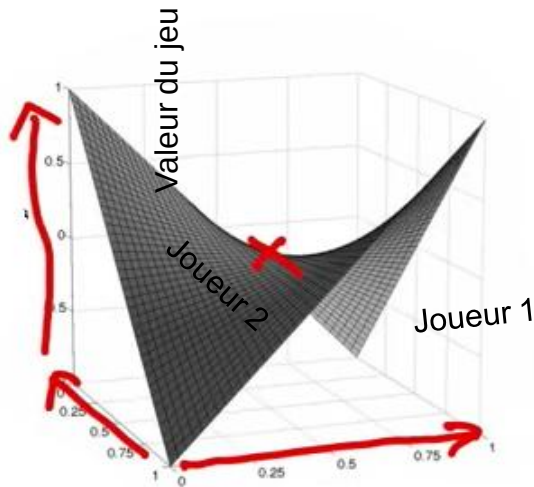
➤ Pour les jeux à somme nulle (c'est-à-dire lorsque les gains d'un joueur sont les pertes de l'autre) la Stratégie Maximin /Minimax permet **quelques fois** de trouver l'équilibre de NASH en stratégies pures , sinon il faut recourir aux stratégies mixtes ⁽¹⁾ qui aboutissent aussi à la même stratégie dans le cas des jeux à somme nulle (théorème)

➤ Le joueur 1 analyse ses gains minimum en fonction de ses coups possibles (-2; 2; -1), le plus fort de ses gains minimum, soit le MAXIMIN est 2
(le joueur 1 veut maximiser ses gains minimum, il est prudent)
Le joueur 2 analyse ses pertes maximum en fonction de ses coups possibles (6,7,2),le plus faible des pertes maximum , soit le MINIMAX est 2
(le joueur 2 veut minimiser ses pertes; il est prudent)

J1 \ J2	L	M	R
F1	5;-5	-2;2	1;-1
F2	6;-6	4;-4	2;-2
F3	0;0	7;-7	-1;1

RECHERCHE DE L'EQUILIBRE DE NASH /STRATEGIES MAXIMIN/MINIMAX POUR LES JEUX à SOMME NULLE(3/4)

Illustration du point selle(saddle point)

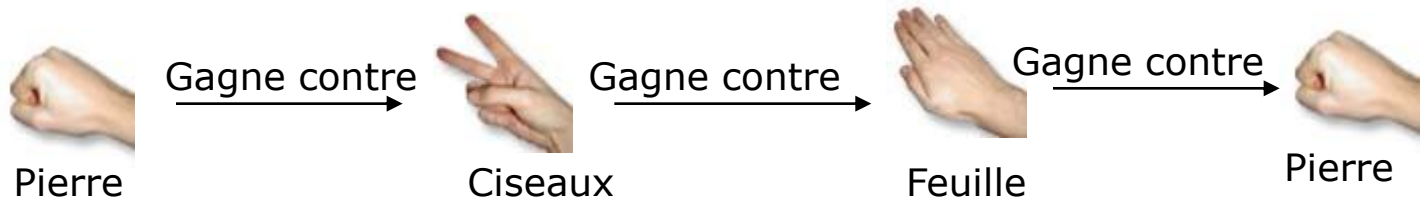


- Tout jeu avec un nombre de joueurs fini et un nombre de choix fini pour chaque joueur admet au moins un équilibre de NASH en **stratégie mixtes**
- La stratégie **Maximin (stratégie dite prudente)** en **stratégie pure ou mixte** n'est pas un équilibre de NASH sauf pour les jeux à somme nulle ou constante

RECHERCHE DE L'EQUILIBRE DE NASH

/STRATEGIES MAXIMIN/MINIMAX POUR LES JEUX à SOMME NULLE(2/4)

pour les jeux à somme nulle le Minimax et le Maximin sont toujours égaux en stratégies mixtes et constituent donc l'équilibre de NASH qu'on appelle la valeur du jeu ou le point selle (saddle point)



	Pierre	Feuille	Ciseaux
Pierre	0;0	-1;1	1;-1
Feuille	1;-1	0;0	-1;1
Ciseaux	-1;1	1;-1	0;0

Nous avons tous joué au jeu pierre, feuille, ciseaux: c'est un jeu à somme nulle et là il faut appliquer la stratégie Maximin en stratégie mixte pour trouver la valeur du jeu qui est nulle , chacun des joueurs jouant un tiers du temps chacune de ses stratégies pures Ce qui n'empêche pas d'organiser des championnats du monde de ce jeu!!!!

RECHERCHE DE L'EQUILIBRE DE NASH EN PRESENCE DE STRATEGIES DOMINEES

Comme un joueur ne joue jamais une stratégie dominée, il est **quelquefois** possible en se restreignant aux **stratégies pures** de trouver l'équilibre de NASH en éliminant successivement les stratégies **strictement** dominées

J1 \ J2	L	M	R
U	3;0	2;1	0;0
M	1;1	1;1	5;0
D	0;1	4;2	0;1

1 La stratégie **R** est dominée par **M**

3 La stratégie **L** est Dominée par **M**

2 La stratégie **M** est Dominée par **U**

RECHERCHE DE L'EQUILIBRE DE NASH

- **Nous avons dit que NASH a établi que tout jeu fini a au moins un équilibre de Nash en stratégies mixtes**
- **Nous avons vu que nous pouvions quelquefois trouver un équilibre en stratégie pures**
 - Par élimination des stratégies dominées dans les jeux à somme non nulle
 - Par la détermination des Minimax et Maximin dans les jeux à somme nulle

Nous allons montrer quelques autres méthodes pour trouver l'équilibre de NASH pour les jeux à somme non nulle:

RECHERCHE DE L'EQUILIBRE DE NASH

EXEMPLE: jeu d'appariement

- Avant de traiter « le dilemme du prisonnier »; donnons quelques exemples de jeux stratégiques non coopératifs à information imparfaite

Matching games

Bob

Alice

		G	D
G	D	1;1	0;0
		0;0	1;1

Matching games: Le jeu de Matching games est un jeu de coordination pure

Quand les journalistes parlent d'une situation

Gagnant/Gagnant, ils doivent sûrement avoir en tête un jeu de coordination pure

Meilleure réponse d'Alice si Bob joue G: c'est G;

Meilleure réponse d'Alice si Bob joue D: c'est D

Meilleure réponse de Bob si Alice joue G: c'est G;

Meilleure réponse de Bob si Alice joue D: c'est D

On dit que (G;G) et (D;D) sont des équilibres de NASH

RECHERCHE DE L'EQUILIBRE DE NASH

EXEMPLE: Bataille des sexes

Bataille des sexes

		Bob	
		A(opéra)	F(foot)
Alice	A(opéra)	2;1	0;0
	F(foot)	0;0	1;2

Bataille des sexes :qualifié de jeu de coordination **impur**, en ce sens que le problème de coordination : aller ensemble au même endroit est combiné à un conflit d'intérêt (aller à l'opéra ou au foot)

Si les deux joueurs jouent vraiment simultanément et sans communication, il leur est difficile de trouver un critère objectif pour se coordonner

Jeu évoqué pour

1)adoption des normes et compatibilité

2)Comportement des syndicats....

Meilleure réponse d'Alice si Bob joue A: c'est A;

Meilleure réponse d'Alice si Bob joue F: c'est F

Meilleure réponse de Bob si Alice joue A: c'est A;

Meilleure réponse de Bob si Alice joue F: c'est F

On dit que (A;A) et (F;F) sont des équilibres de NASH

Commentaires sur le jeu: Bataille des sexes

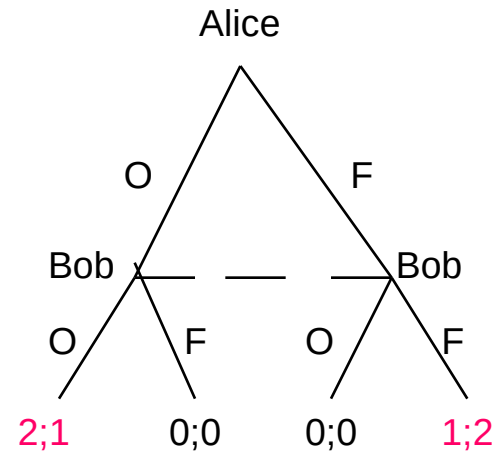
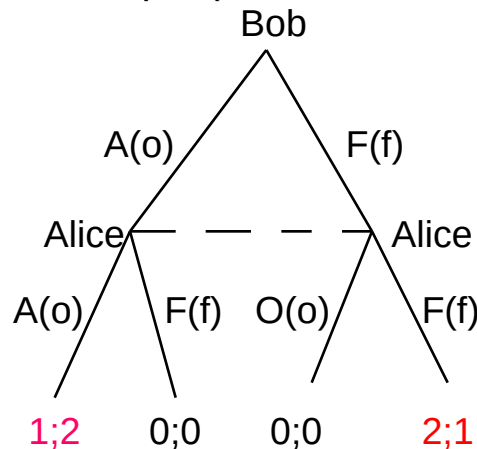
	A(opéra)	F(foot)
A(opéra)	2;1	0;0
F(foot)	0;0	1;2

1)adoption des normes et compatibilité
2)Comportement des syndicats....

- On a ici deux équilibres de NASH ; quelle est la « solution »
- On peut envisager Que si le joueur 1 (Alice) joue en premier la solution A(Opéra), même si le joueur 2 (Bob) ne sait pas qu'Alice a joué, il peut anticiper qu'Alice va choisir son action préférée et donc jouer aussi Opéra; on voit donc que jouer en premier donne un avantage même si le second joueur n'a aucune information sur le choix du premier (RUBINSTEIN parle d'observabilité virtuelle)
 - On peut aussi envisager que le joueur 2(Bob) annonce qu'il va jouer F(Football), en général cette annonce est généralement crue par le joueur 1(Alice) qui joue elle aussi F(Football); car elle aurait une utilité inférieure si elle ne le croit pas
Si le joueur 1 fait une contre annonce: la coordination devient improbable ou difficile
Si le joueur 1croit le joueur 2 et ne fait pas de contre annonce: c'est un aveu de faiblesse et l'équilibre se fait sur l'action préférée du joueur 2.
 - Ils peuvent aussi jouer un équilibre corrélé(s'il fait beau, ils vont au foot, s'il fait mauvais, ils vont à l'opéra)

Commentaires sur le jeu: Bataille des sexes

- Les jeux précédents ont été présentés sous forme stratégique ou normale, on peut aussi les représenter par un arbre de décision
- Exemple (bataille des sexes)



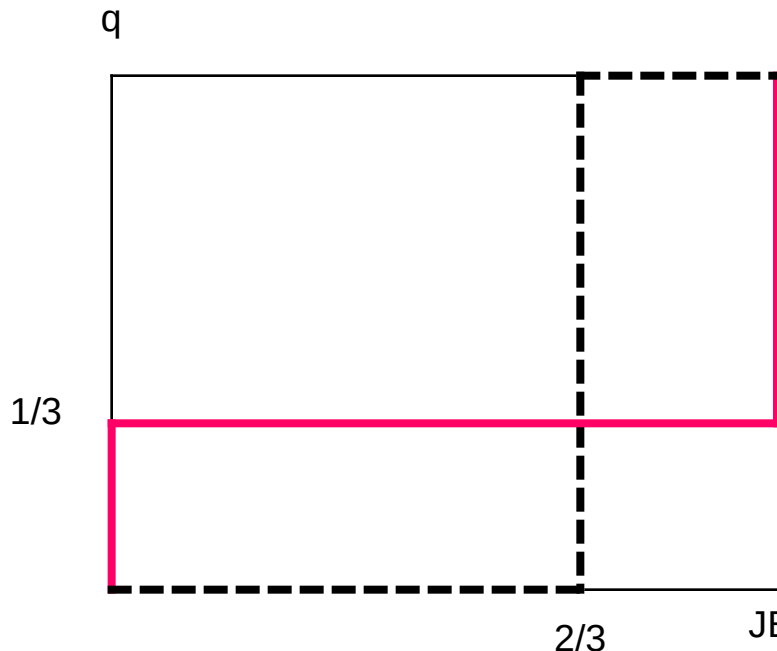
- Cette représentation des jeux non coopératifs à information imparfaite est moins pratique pour trouver les équilibres lorsque les joueurs interagissent simultanément

Note: il ya un pointillé parce que le joueur ne sait pas ce que l'autre a joué (jeu simultané)

RECHERCHE DE L'EQUILIBRE DE NASH

EXEMPLE: Bataille des sexes après 30 ans de Mariage

		Bob	
		p	1-p
		A(opéra)	F(foot)
Alice	q	A(opéra)	0;2
	1-q	F(foot)	1;0



- L'espérance d' Alice est:
 - $0p + 2(1-p) = 2-2p$ si elle joue A(O)
 - $1p + 0(1-p) = p$ si elle joue F(foot)
 - Donc Alice préférera jouer A(O) si $2-2p > p$ soit si $p < 2/3$ soit si $p > 2/3$

➤ (ligne rouge)

- L'espérance de Bob est
 - $2q + 0(1-q) = 2q$ si il joue A(O)
 - $0q + 1(1-q) = 1-q$ si il joue F(foot)
 - Donc Bob préférera jouer A(O) si $2q > 1-q$ soit si $q > 1/3$

L'équilibre de NASH est atteint pour $p=2/3$ et $q=1/3$

THEORIE DES JEUX

EXEMPLE: Bataille au cerf(1/3)

		Bob	
		A(cerf) colombe	B(lièvre) faucon
Alice	A(cerf) colombe	5;5	0;4
	B(lièvre) faucon	4;0	2;2

Chasse au cerf:

Origine: *passage du discours sur l'origine et les fondements de l'inégalité parmi les hommes de J.J ROUSSEAU*

« S'agissait il de prendre un cerf, chacun sentait bien qu'il devait pour cela garder son poste, mais si un lièvre venait à passer à la portée de l'un d'eux, il ne faut pas douter qu'il ne le poursuivit sans scrupule, et qu'ayant atteint sa proie, il ne se souciait fort peu de faire manquer la leur à ses compagnons »

En économie:

1)travail d'équipe

2) Panique bancaire: atténué par le système d'assurance

Meilleure réponse d'Alice si Bob joue A: c'est A;
 Meilleure réponse d'Alice si Bob joue B: c'est B
 Meilleure réponse de Bob si Alice joue A: c'est A;
 Meilleure réponse de Bob si Alice joue B: c'est B

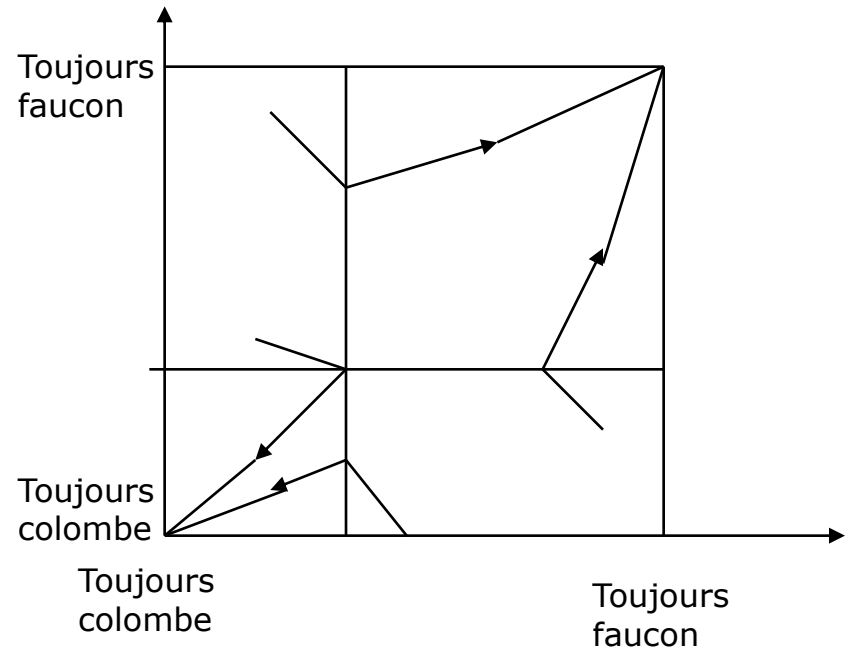
On dit que (A;A) et (B;B) sont des équilibres de NASH

THEORIE DES JEUX

EXEMPLE: Bataille au cerf(2/3)

- Là encore nous avons deux équilibres de NASH; mais cette fois les bassins d'attraction des deux équilibres sont éloignés

		Bob	
		A(cerf) colombe	B(lièvre) faucon
Alice	A(cerf) colombe	5;5	0;4
	B(lièvre) faucon	4;0	2;2



Commentaires sur le jeu: Bataille au cerf(3/3)

		A(cerf) colombe	B(lièvre) faucon
Alice	A(cerf) colombe	5;5	0;4
	B(lièvre) faucon	4;0	2;2

- L'équilibre de NASH est donc plus difficile à atteindre
- En effet supposons que la convention courante soit de jouer faucon et qu'Alice cherche à persuader Bob qu'elle projette de jouer colombe et qu'il devrait la suivre ; sera-t-il convaincu?
- À l'évidence non, quoi qu'Alice ait l'intention de jouer, son intérêt est de persuader Bob de jouer colombe. Si elle réussit, elle obtiendra 5 en jouant colombe et 4 en jouant faucon
- Donc, la seule rationalité ne permet à Bob de déduire quoi que se soit sur le projet d'Alice à partir de ce qu'elle dit, parce qu'elle dirait la même chose quelle que soit son intention véritable.
- Donc Alice pensera que Bob ne se laissera pas convaincre et elle jouera faucon elle même tout en continuant d'essayer de convaincre Bob de jouer colombe.
- **Travail d'équipe**: incentives pour aboutir à l'équilibre efficient
- **Panique bancaire**: systèmes d'assurance pour aboutir à l'équilibre efficient

EXPERIENCE (1/2)

- Expérience menée en 1979 par B.A. Baldwin et G.B.Meese sur deux cochons de taille différentes



P \ G	Ouvrir	attendre
Ouvrir	1;5	-1;9
Attendre	4;4	0;0

- 2 cochons (l'un grand, l'autre petit)
- Chacun peut ouvrir le clapet et courir se nourrir ou attendre devant la nourriture que le clapet s'ouvre, courir coûte deux unités de nourriture
- Le partage des 10 unités de nourriture se fait selon le tableau suivant.
- 1 pour le petit et 9 pour le grand si le grand mange en premier
- 4 pour le petit et 6 pour le grand si le petit mange en premier
- 3 pour le petit et 7 pour le grand s'ils mangent en même temps

Le petit cochon a intérêt à attendre « s'il veut survivre »

EXPERIENCE (2/2)

- Résultats expérimentaux

	Un seul	ensembl e
Grand	75	105
Petit	70	5

- Est-ce que les cochons sont rationnels?
- Est-ce que les cochons connaissent la théorie des jeux?
- Ils semblent apprendre et répondre à des « incentives » en jouant la stratégie dominante
- Ils semblent apprendre et ne pas jouer une stratégie dominée

L'apprentissage, l'évolution et la survivance du plus apte(the fittest) seront exposés dans la théorie des jeux et l'évolution

THEORIE DES JEUX

DILEMME DU PRISONNIER(1/4)

Dilemme du prisonnier

		Bob	
		C	D
Alice	C	3,3	0,5
	D	5,0	1,1

-Jeu expérimental proposé par Melvin Dresher Et Merrill Flood en 1950.

-Nommé ainsi par Albert Tucker en 1950

-En 1995, HOLM a soulevé un problème de logique; chaque prisonnier doit avouer (jouer C) qu'il **SOIT COUPABLE OU NON!!!!!!**

-(it's a joke!!)

On va d'abord citer quelques exemples d'applications du dilemme du prisonnier
Et nous allons examiner ce jeu lorsqu'il est répété indéfiniment puis lorsqu'il est répété un nombre fini de fois.

	C	D
C	R;R	S;T
D	T;S	P;P

Pour qu'il y ait dilemme, il faut:

➤ Que la Trahison **T** soit supérieure à la récompense de la collaboration **R**

➤ Que la récompense de la collaboration **R** soit supérieure à la trahison **P**

➤ Que la trahison **P** soit supérieure à la duperie **S**

➤ Donc: **$T > R > P > S$**

Une deuxième inégalité doit aussi être appelée si l'on veut qu'une coopération soit avantageuse dans tous les cas

$$2R > S+T > 2P$$

THEORIE DES JEUX

DILEMME DU PRISONNIER(2/4)

Dans le domaine militaire

		URSS	
		Désarmement	Armement
ETATS UNIS	Désarmement	Economies Et Protection pour Chaque pays	-Risque et faiblesse pour les ETATS UNIS -Protection et puissance Pour l'URSS
	Armement	-Protection et puissance pour les Etats-Unis -Risque et faiblesse pour l'URSS	Couts et risque pour chaque pays

Une solution coopérative peut être envisagée en signant par exemple un accord de désarmement ou par une menace

THEORIE DES JEUX

DILEMME DU PRISONNIER(3/4)

Dans le domaine économique

		ENTREPRISE 2	
		Politique « accommodante »	Politique « agressive »
ENTREPRISE 1	Politique « accommodante »	Profil moyen pour chacune	-Profit très faible -pour E1 --Profit élevé -pour E2
	Politique « agressive »	-Profit très faible pour E1 --Profit élevé pour E1	Profit faible Pour chacune

Une solution coopérative peut être envisagée par exemple en parvenant à un accord
« tacite » car interdit par la loi sur les prix

THEORIE DES JEUX

DILEMME DU PRISONNIER(4/4)

Dans le domaine sportif

		ATHLETE 2	
		Ne pas se doper	Se doper
ATHLETE1	Ne pas se doper	Les deux athlètes se Partagent les honneurs sans risque pour leur santé	--A1 ne gagne rien -- A2 gagne tout
	Se doper	--A2 ne gagne rien -‘A1 gagne tout	Les deux athlètes se Partagent les honneurs Avec un risque pour Leur santé

On peut modifier « l'équilibre » en modifiant la structure du sport professionnel(moins d'argent, Moins de compétition, plus de tests, plus de prévention,...). Ou menacer par des amendes, de la prison,.....



DILEMME DU PRISONNIER REPETE

- Le dilemme du prisonnier incarne le fait que la coopération n'est pas nécessairement rationnelle
- Cette conclusion déplaisante disparaît-elle si Alice et Bob jouent à plusieurs reprises?
- La réponse est NON s'il jouent un **nombre fini de fois** (raisonnement par l'induction à rebours ou backward induction)
c'est le fameux: « après moi le déluge »
- Doit-on conclure que la coopération rationnelle est impossible même quand le dilemme du prisonnier est répété?
- Dans la vie réelle, Alice et Bob croient toujours qu'il y a une certaine probabilité non nulle qu'ils se reverront le lendemain pour jouer au dilemme du prisonnier quel que soit le nombre de fois qu'ils y ont joué dans le passé
- Nous allons montrer que dans ce cas la coopération peut être rationnelle

DILEMME DU PRISONNIER REPETE

Notons d'abord qu'Alice et Bob peuvent adopter plusieurs stratégies

- **ALEATOIRE** : Alice et Bob joue à chaque répétition la défection(D) et la coopération (C) de façon aléatoire.
- **TOUJOURS SEUL** :Alice et Bob jouent systématiquement la défection cette stratégie consiste à faire toujours défection.
- **DONNANT DONNANT (en anglais tit-for-tat)**: Alice et Bob commencent par coopérer puis à rejouer systématiquement ce que fait l'autre au coup précédent La coopération sera immédiatement récompensée par la coopération et la défection immédiatement punie par la défection .Cette stratégie se caractérise par sa réciprocité. ; programme proposé par le psychologue Anatol Rapoport) (« je te gratte le dos si tu me le gratte après »)
- **UN OEIL POUR DEUX YEUX** : Alice et Bob se comportent un peu comme DONNANT DONNANT à la différence que chacun attend deux défections pour à son tour faire une fois, cavalier seul. Plus tolérante, cette stratégie peut donc aussi apparaître comme plus exploitable
- **PUNITION INEXORABLE (Grim strategy)** Alice et Bob commencent par coopérer ,continuent à coopérer tant que l'autre n'a pas trahi et à trahir le reste du jeu à partir du moment où l'autre joueur a trahi
-
- Examinons quelques stratégies

DILEMME DU PRISONNIER REPETE

GRIM STRATEGY(punition inexorable)

- La stratégie de punition inexorable (GRIM STRATEGIE) adoptée par les deux joueurs consiste
 - à démarrer le jeu en coopérant(C) et continuer à coopérer tant que l'autre joueur n'a pas trahi(c'est-à-dire n'a pas joué (D))
 - Jouer la non coopération (D) le reste du jeu à partir du moment où l'autre joueur a trahi en jouant (D)
- Si on fait intervenir la probabilité δ que le jeu se répète ou le coefficient d'actualisation r : (à savoir un gain à l'instant $t+1$ est plus faible qu'un gain à l'instant t .): $\delta=1/1+r$
- On démontre facilement à l'aide de connaissances en progressions géométriques que si δ est supérieur à $1/2$ (ou ce qui est équivalent si $r < 1$), l'équilibre de coopération initial est maintenu et le gain de chaque joueur est $5+(\delta /1- \delta)$

Justification de la valeur de δ

- 1) Coopérer tout le temps rapporte:
 $3 + 3(1 + \delta + \delta + \delta + \dots) = 3/(1 - \delta)$
- 2) Trahir procure un gain de
 $5 + \delta(1 + \delta + \delta + \dots) = 5 + \delta/(1 - \delta)$
- 3) Donc coopération si $3/(1 - \delta) > 5 + \delta/(1 - \delta)$ soit

DILEMME DU PRISONNIER REPETE

GRIM STRATEGY(punition inexorable)(suite)

Donc, la stratégie de punition inexorable (GRIM STRATEGIE) adoptée par les deux joueurs conduit à l'équilibre de coopération

Mais, il y a multiplicité des équilibres ,synonyme d'indétermination qui ne permet pas de faire **une prédiction** sur l'issue du jeu.

par exemple les joueurs pourraient décider de jouer la coopération pendant les t premières périodes et jouer la grim strategy à partir de la période $t+1$

DILEMME DU PRISONNIER REPETE

TIT FOR TAT STRATEGY(Stratégie du donnant /donnant)

- Pour montrer que la stratégie tit for tat est celle qui s'impose dans un monde où les joueurs font face à des dilemmes de prisonnier répétés, il invite ses collègues de différentes disciplines à soumettre un programme pour jouer un dilemme du prisonnier 200 fois
- Chaque programme contient donc la stratégie que désire suivre le joueur; l'expérience s'apparente à un tournoi, puisque chaque programme est confronté à tous les autres et à un programme jouant au hasard.
- Le programme ayant accumulé le gain total le plus élevé est déclaré vainqueur du tournoi.
- Dans un premier tournoi, 14 programmes furent en compétition et c'est le programme donnant/. donnant d' Anatol RAPOPORT qui remporta le tournoi
Un deuxième tournoi de 62 programmes provenant de 6 pays fut organisé et c'est encore le programme donnant/donnant de Rapoport qui obtint le gain le plus élevé

DILEMME DU PRISONNIER REPETE

Les résultats d'Axelrod furent largement commentés

Ils suggèrent que dans un monde de conflits permanents, il serait « optimal » de se comporter de la manière suivante:

- Etre à priori coopératif (jouer C au début)

- Punir son partenaire lorsqu'il n'a pas coopéré (Jouer D à chaque fois qu'il joue D)

- Pardonner et revenir à la coopération (jouer C à chaque fois qu'il a joué C)

La grande force de la stratégie donnant- donnant est sa capacité d'adaptation : une coopération fructueuse à long terme est possible avec un partenaire bienveillant tout en évitant éventuellement de se faire « exploiter » par un partenaire « agressif »

On retrouve ces idées en biologie dans la théorie de l'évolution.(on observe des comportements de type donnant-donnant chez certains animaux(Cf. expérience de Manfred Milinski en 1987)

Un expérience très simple permet de « démontrer » que l'homme a été « programmé » au cours de l'évolution de l'espèce pour coopérer avec ses congénères.

- L'activation du striatum , une des zones du cerveau associée à la satisfaction est plus forte en situation de coopération avec un humain qu'en situation de coopération avec un ordinateur; alors que les gains monétaires sont les mêmes!!!

Conclusions sur le dilemme du prisonnier

- Que peut-on en déduire ? Axelrod donne plusieurs conseils à ses lecteurs à la fin de son livre :
- 1. Ne soyez pas trop envieux, ne cherchez pas à faire plus que votre adversaire, mais contentez-vous d'un honnête 3,3. En l'espèce, le plus est l'ennemi du bien ! En essayant d'avoir plus, le jeu entre rapidement dans un cycle de méfiance qui le conduit vers une situation de non-coopération. Il ne faut pas essayer de prendre à l'autre, mais essayer de bâtir la coopération
- 2. Ne soyez pas le premier à faire défection, commencez par essayer de coopérer.
- 3. Mais n'hésitez pas à punir s'il le faut. Rendez la pareille.
- 4. Enfin, le très pertinent «Ne soyez pas trop intelligent ! » les programmes qui tentaient le plus de se comporter de façon stratégique pour essayer d'obtenir les cinq points n'ont pas fait particulièrement mieux que les programmes simples

DILEMME DU PRISONNIER REPETE

	Avant	
	C	D
C	3,3	0,5
D	5,0	1,1

	Après	
	C	D
C	3,3	0,10
D	10,0	1,1

- La grim strategy nécessite un δ plus grand, un calcul simple donne $7/9$ au lieu de $1/2$
- Avec la stratégie C,D les périodes paires et la stratégie D,C les périodes impaires, les joueurs gagnent en moyenne 5 chacun au lieu de 3 chacun si ils coopèrent tout le temps (situation que vous connaissez bien quand des entreprises s'entendent pour les réponses à des appels d'offres!!!!)

REMARQUES SUR LE DILEMME DU PRISONNIER

Indéfiniment Répété

- Pour le jeu répété infiniment, nous avons fait des hypothèses qui méritent d'être notées
 - Il s'agit du même jeu que l'on répète à chaque étape: → jeux stochastiques
 - Les joueurs connaissent exactement le jeu qui est répété à chaque période → jeux à information incomplète ou jeux Bayesiens
 - Les joueurs observent exactement toute l'histoire du jeu à chaque étape → jeux à observation imparfaite.

DILEMME DU PRISONNIER REPETE/ EXPERIENCES

- Expérimentalement, quand on répète le jeu un nombre fini de fois , on constate que
 - La stratégie « purement coopérative » : jouer systématiquement C apparaît dans 10% des cas
 - La stratégie de « trahison permanente »: jouer systématiquement D apparait dans 30% des cas
 - La stratégie de « coopération conditionnelle »: jouer C lorsque l'autre joueur a joué C et jouer D lorsque l'autre joueur a joué D apparaît dans 50% des cas.
- Pourquoi la stratégie théorique(jouer systématiquement D) n'apparaît que dans 30% des cas, moins que la stratégie de coopération conditionnelle(50% des cas)?
 - Les nombreuses expériences ont montré que les joueurs coopèrent lors des premières périodes , mais au fur et à mesure que la fin du jeu se rapproche, ils sentent de plus en plus le danger de ne pas être le premier à ne plus coopérer et finissent par trahir à quelques périodes de la fin du jeu (Effet de fin de jeu)
 - KREPS(1982) affirme que les joueurs ayant des doutes sur la nature de leur adversaire(ses options, ses motivations)font que le jeu peut avoir un équilibre avec coopération dans toutes les périodes à l'exception des deux dernières(résultat théorique)

THEORIE DES JEUX

à quoi sert la théorie des jeux?

- Avec autant de prix « Nobel », on s'attend à trouver beaucoup d' applications concrètes.
- Certes, beaucoup de consultants ont introduits la théorie des jeux dans leur boîte à outils
- Certes certaines grosses compagnies (IBM,HP) financent des centres de recherche dans le domaine de la théorie des jeux
- Certes, ce sont des praticiens de la théorie des jeux qui ont monté l'architecture des enchères pour les fréquences qui a rapporté plusieurs dizaines de milliards.
- Les critiques viennent le plus souvent des spécialistes du domaine
 - Gibson(2010, Rubinstein(2006,2012)..... expriment leur scepticisme quant à la robustesse des conclusions tant ils sont sensibles aux hypothèses
- Le domaine des systèmes distribués fait l'objet actuellement de dépôts de brevets
 - Amélioration du protocole TCP pour diminuer le nombre de paquets perdus et pour rendre plus efficace le routage
 - Amélioration des réseaux mobiles pour mieux distribuer les mobiles en fonction de la ressource.
- Publications académiques sur la théorie de l'évolution (théorie des jeux évolutionnaires)

CONCLUSION ?

- Comment expliquer le succès de la théorie des jeux, alors qu'on ne sait pas très bien à quoi elle sert, ni sur le plan positif, ni sur le plan normatif?
- L'explication est peut-être qu'elle oblige à **réfléchir** sur la complexité des interactions sociales.
- En contraignant le **modélisateur à préciser** tous les éléments de son modèle elle évite le recours aux échappatoires habituelles qui consistent à évoquer
 - soit de mystérieux “mécanismes”
 - Soit des “forces” et autres métaphores empruntées à la physique

THEORIE DES JEUX/CITATIONS

- The theory of games was first formalized by Von Neumann & Morgenstern (1953) in reference to human economic behavior. Since that time, the theory has undergone extensive development... Sensibly enough, a central assumption of classical game theory is that the players will behave rationally, and according to some criterion of self-interest. Such an assumption would clearly be out of place in an evolutionary context. Instead, the criterion of rationality is replaced by that of population dynamics and stability, and the criterion of self-interest by Darwinian fitness
John Maynard Smith
- The last decade has seen a steady increase in the application of concepts from the theory of games to the study of [evolution](#). Fields as diverse as sex ratio theory, animal distribution, contest behavior and reciprocal altruism have contributed to what is now emerging as a universal way of thinking about phenotypic evolution... Paradoxically, it has turned out that game theory is more readily applied to biology than to the field of economic behavior for which it was originally designed
John Maynard Smith

Les enseignements du Dilemme

...

- Ne pas être envieux
- Ne pas être le premier à faire cavalier seul
- Pratiquer la réciprocité dans la coopération comme dans la défection
- Ne pas vouloir être trop malin

...et une (très) réduite bibliographie

- John von Neumann/Oskar Morgenstern (1944) « Theory of Games and Economic Behavior » Princeton University Press
- Martin Shubik –ss.la dir.de (1991) « Théorie des jeux et sciences sociales » Paris, Economica
- « Social dilemmas and fluid organizations » in Computational organization theory, K.M.Carley ed.(1994) Lawrence Erlbaum Assoc.
- Robert Axelrod (1996) « Comment réussir dans un monde d'égoïstes: théorie du comportement coopératif » Odile Jacob
- William Poundstone (2003) « Le dilemme du prisonnier » Cassini
- John L.Casti (1994) « Complexification » Harper Collins
- G.Nicolis et I. Prigogine (1989) « Exploring Complexity » W.H.Freeman
- M.Gell-Mann (1994) « The Quark and the Jaguar » W.H.Freeman
- G.A.Cowan,D.Pines,D.Meltzer (1994) « Complexity » Addison Wesley