

# Loi de puissance

## ➔ Introduction et définition

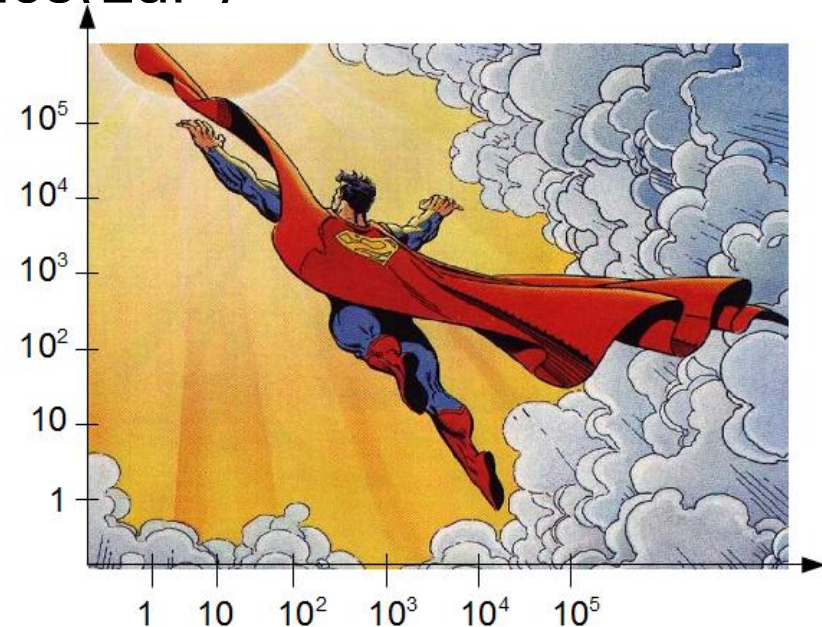
### ■ Propriétés de la loi de puissance(LdP)

- LdP et loi probabilités
- LdP et loi d'échelle
- LdP et graphes complexes
- LdP et SOC

### ■ Exemples d'applicabilité

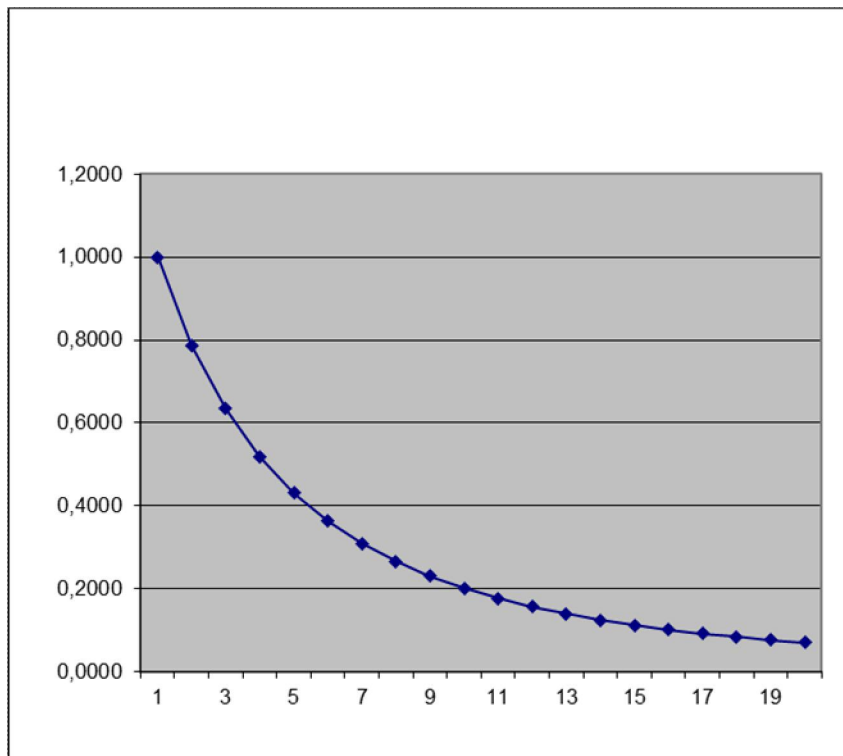
- Economie
- Réseaux
- Linguistique
- Sismique
- Géographie

### ■ Réflexion générale: le cygne noir

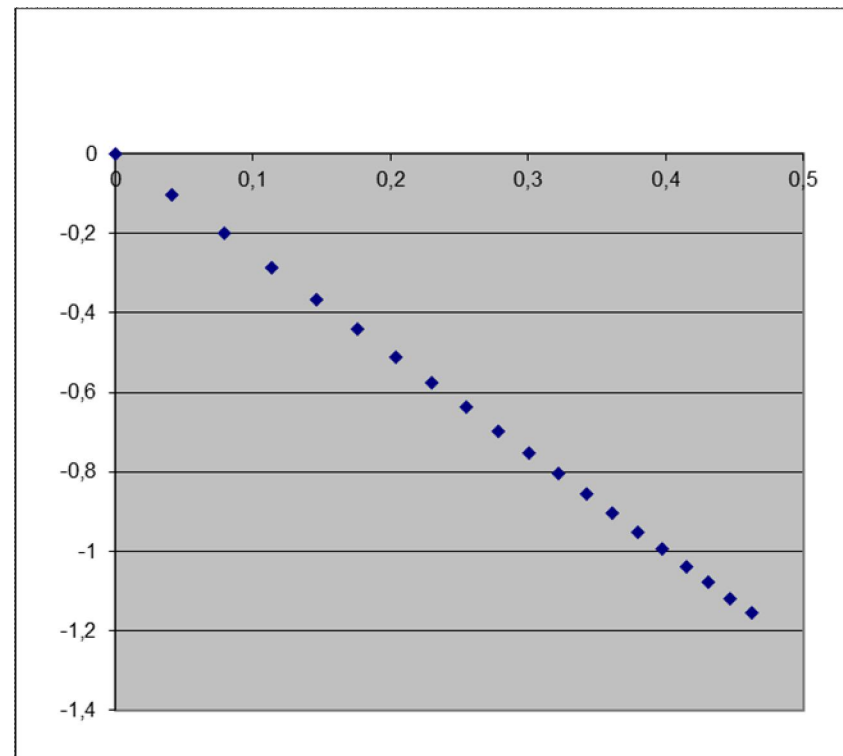


**Les lois de puissance  
vont-elles sauver le  
monde?**

# Loi de puissance: définition



**Loi de puissance  
forme habituelle  
 $Y=1/(X^\alpha)$**



**Loi de puissance  
forme log log  
 $\log Y = -\alpha \log X$**

# Loi de puissance: au cœur de nombreux domaines théoriques et appliqués

## Théories

Probabilités selon Mandelbrot:

- hasard bénin
- hasard sauvage

Auto similarité et principe d'échelle, dimension fractale

Graphes complexes et structure petit monde

Systèmes critiques auto-organisés (SOC)

Longue traîne

Loi de  
puissance  
 $Y=1/(x^\alpha)$

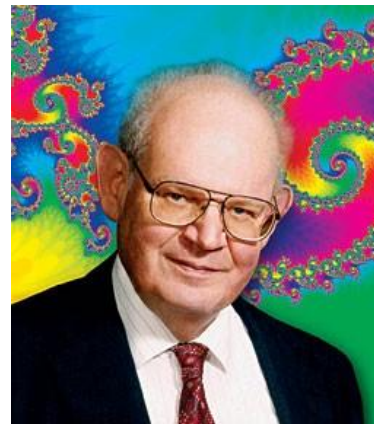
## Applications

Economie, Bourse  
Marketing  
Géographie  
Turbulences  
Bruit électronique  
Réseaux télécom  
Linguistique  
Tremblements de terre  
Etc..



# Noms associés à la loi de puissance

| Noms                  | Domaines                                                                   | Période   |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Wilfried Pareto       | Distribution des revenus                                                   | 1848-1923 |
| George Kingsley Zipf  | Linguistique, géographie                                                   | 1902-1950 |
| Benoit Mandelbrot     | Dimension fractale, invariance d'échelle<br>Hasard sauvage, prix boursiers | 1924-2010 |
| Per Bak               | Criticalité auto organisée (SOC)                                           | 1948-2002 |
| Nassib Nicholas Taleb | Cygne noir, importance des longues traines                                 | 1960-     |
| Albert Barabasi       | Grands graphes de terrain                                                  | 1967-     |



# Rappel sur les lois de probabilité

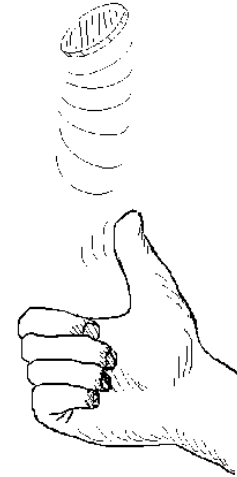
- Une loi de probabilité (qu'elle soit discrète ou continue) est exprimable de deux manières:
  - Densité de probabilité
  - Répartition (cumul des probabilités)
- Deux grandeurs fondamentales, lorsque calculables, caractérisent une loi de probabilité :
  - Espérance mathématique  $E = \sum px$ , (moyenne pondérée de  $x$ ) aussi appelée moyenne notée  $m$  ou  $\mu$
  - Ecart type noté  $\sigma$ , racine de l'écart quadratique moyen (variance)
- Une des propriétés importantes des lois de probabilité est la loi des **grands nombres**: en répétant un grand nombre de fois un tirage d'une variable aléatoire  $X$ , la moyenne des réalisations de  $X$  tend vers la moyenne de la loi de probabilité

# Exemple: loi binomiale: pile ou face

10 parties de pile ou face avec une pièce non biaisée

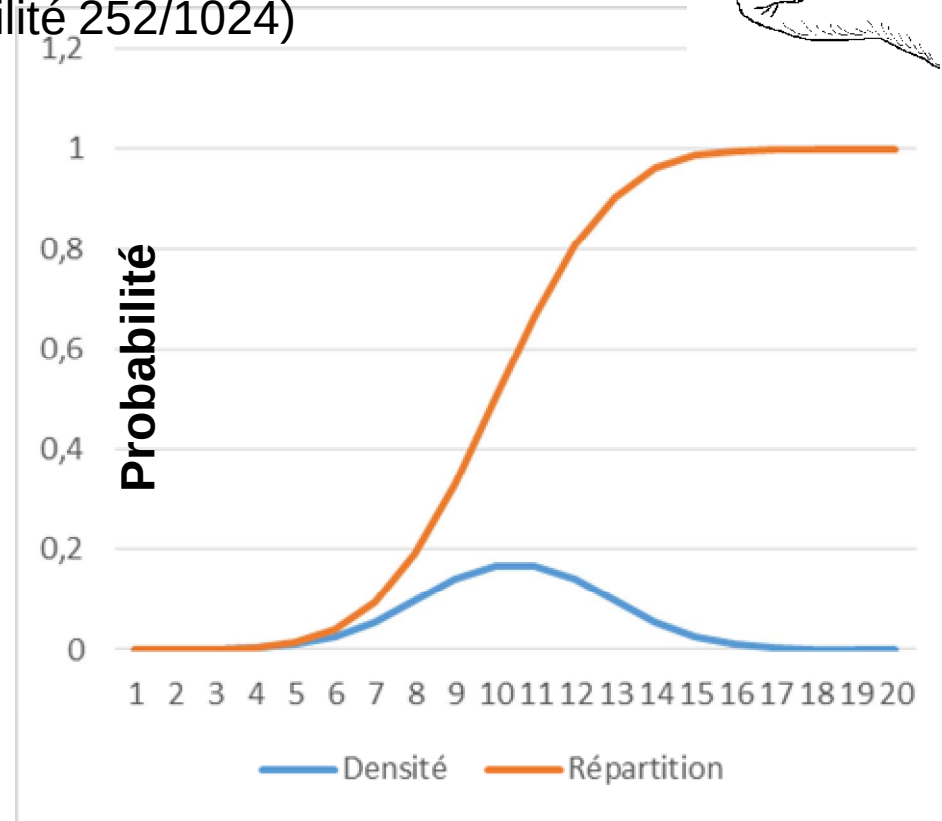
$2^{10} = 1024$  parties différentes

- 1 cas où 10 piles (probabilité  $1/1024$ )
- 10 cas où 9 piles (probabilité  $10/1024$ )
- ....
- 252 cas où 5 piles (probabilité  $252/1024$ )



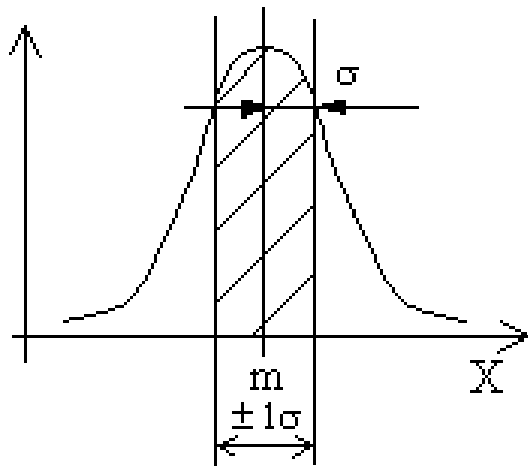
## Triangle de PASCAL

|                                     |
|-------------------------------------|
| 1                                   |
| 1 2 1                               |
| 1 3 3 1                             |
| 1 4 6 4 1                           |
| 1 5 10 10 5 1                       |
| 1 6 15 20 15 6 1                    |
| 1 7 21 35 35 21 7 1                 |
| 1 8 28 56 70 56 28 8 1              |
| 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1         |
| 1 10 45 120 212 252 212 120 45 10 1 |
| etc., etc., etc., etc               |

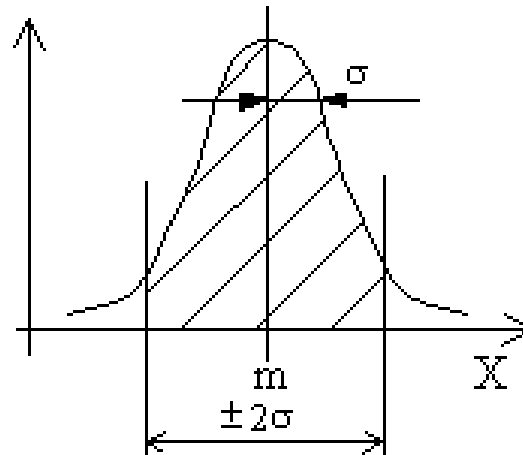


Nombre de piles pour 20 parties

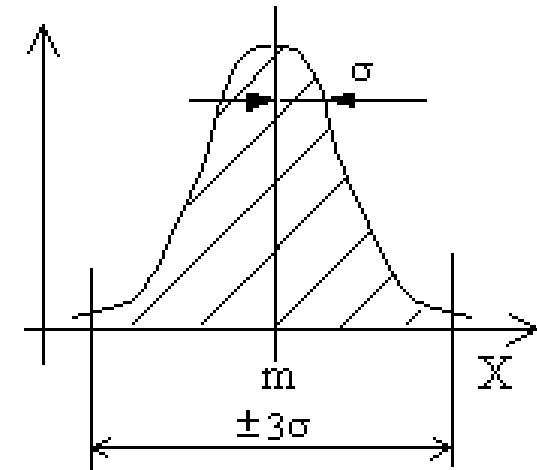
# La loi normale, archétype du hasard bénin



environ 68% des individus  
sont compris dans l'intervalle  
 $m \pm 1\sigma$



environ 95% des individus  
sont compris dans l'intervalle  
 $m \pm 2\sigma$



environ 99,8% des individus  
sont compris dans l'intervalle  
 $m \pm 3\sigma$

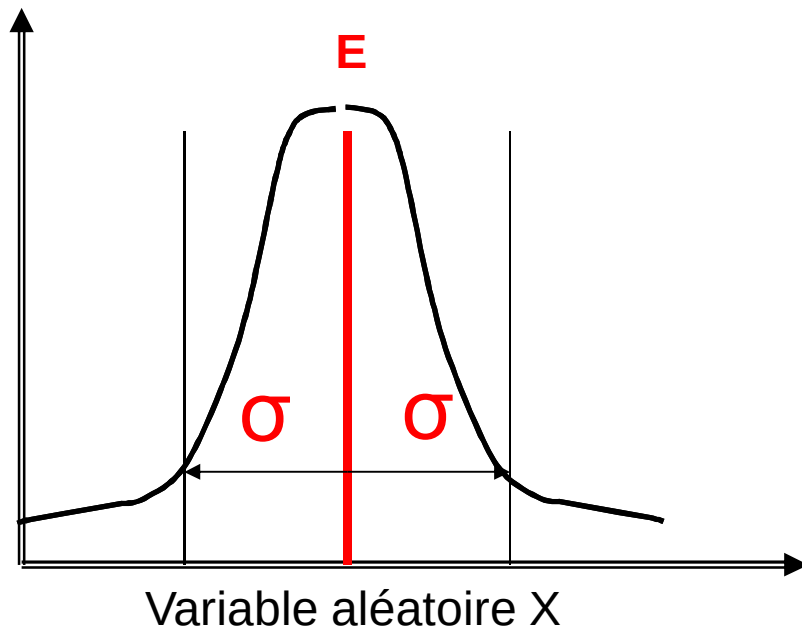
Les hypothèses d'applicabilité d'une loi normale: les variables doivent être:

1. **Indépendantes**: tomber trois fois sur le côté pile à la suite ne va pas modifier la probabilité de sortir un autre côté pile au quatrième lancer (tendance à ne pas privilégier les longues séries)
2. **Identiquement distribuées**: les valeurs obtenues résultent toutes de la même loi de probabilité

# Hasard bénin et Hasard sauvage

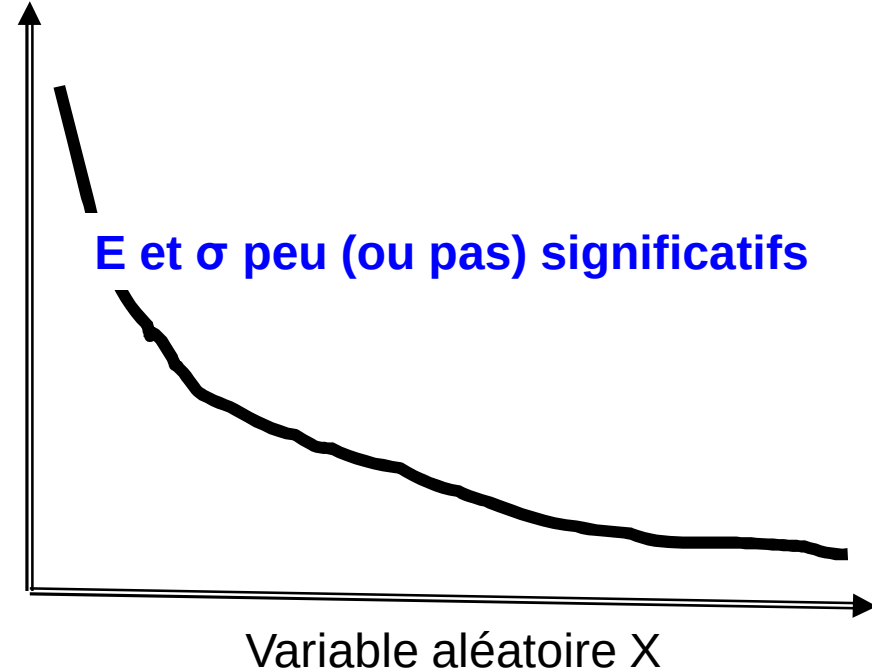
**Espérance:**  $E = \sum p x$ , (moyenne pondérée de  $x$ )  
aussi appelée moyenne notée  $m$  ou  $\mu$   
 $\sigma$ : écart type

P densité de Probabilité



**Hasard bénin**  
**(binomiale, normale, etc.)**

P densité de Probabilité



**Hasard sauvage**  
**(loi de puissance)**

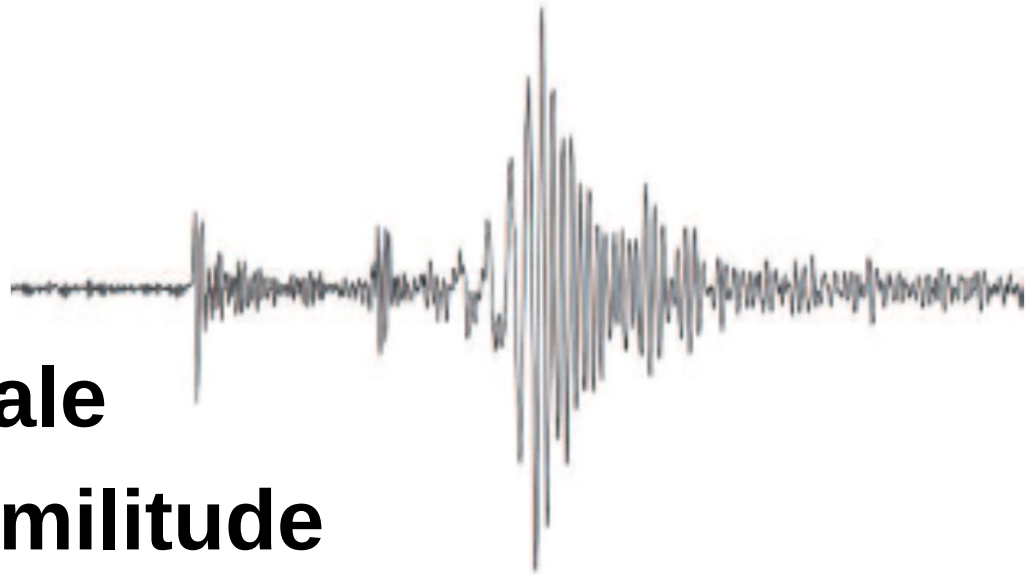
# Loi normale et loi de puissance

## En résumé

|                     | Loi normale | Loi de puissance |
|---------------------|-------------|------------------|
| Valeurs extrêmes    | Très rares  | Fréquentes       |
| Moyenne             | Légitime    | N'a pas de sens  |
| Ecart type          | Légitime    | N'a pas de sens  |
| Equilibre Stabilité | Naturel     | Rare et ponctuel |

# Terminologie fractale

- Loi d'échelle
- Autosimilarité
- Dimension fractale
- Dimension de similitude
- Distribution scalante
- Invariance d'échelle (scale free)



# Fractales et invariance d'échelle

L'idée des fractales est que certains aspects du monde ont la même structure de près et de loin, à toutes les échelles, et que seuls les détails sans importance changent quand on les agrandit pour voir les choses de près.



**Ainsi, chaque petit bout d'une fractale contient la clé de la construction toute entière**

# Invariance d'échelle et LdP

L'une des caractéristique des lois de puissance est leur **invariance d'échelle**: pour un changement d'échelle de la variable ( $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{cx}$ ), la fonction est seulement multipliée par un coefficient :

$$\begin{aligned} \text{si } f(x) &= ax^k \\ f(cx) &= a(cx)^k = ac^k x^k = c^k f(x) \end{aligned}$$

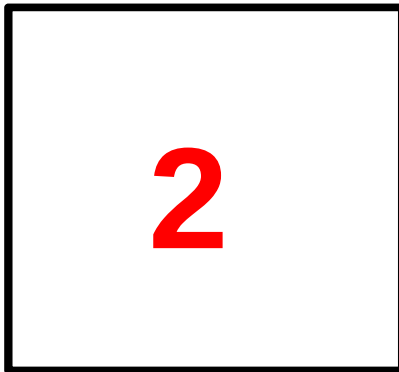
Ainsi, toutes les lois de puissance de même exposant sont équivalentes à un facteur constant près  $\mathbf{c^k}$ .

# Dimensions géométriques

Mesure de  
l'objet réduit

$1/2^D$

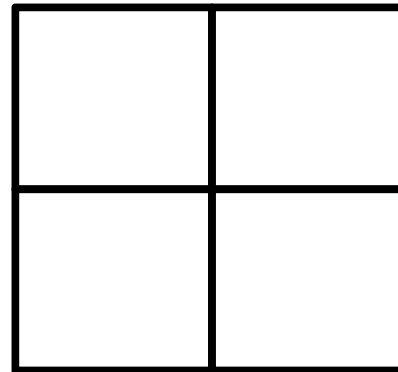
$1$



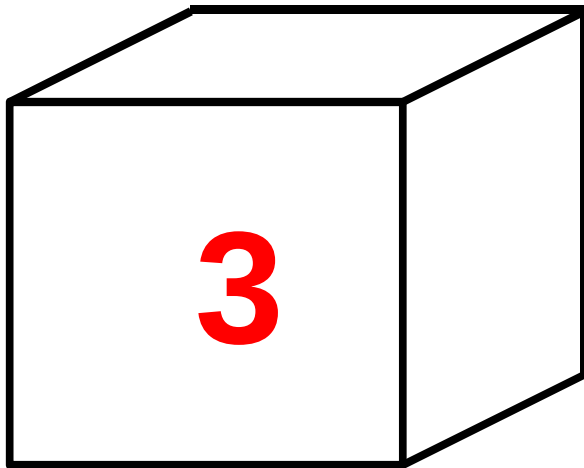
$2$



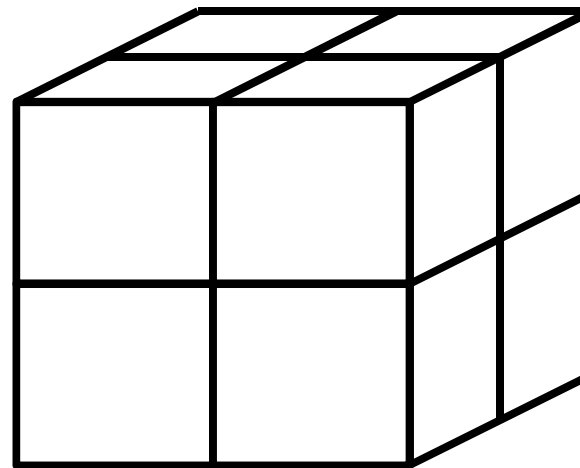
$1/2$



$1/4$

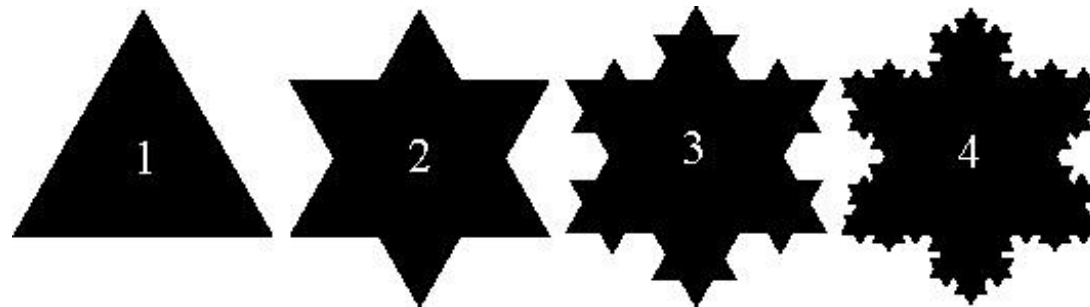


$3$

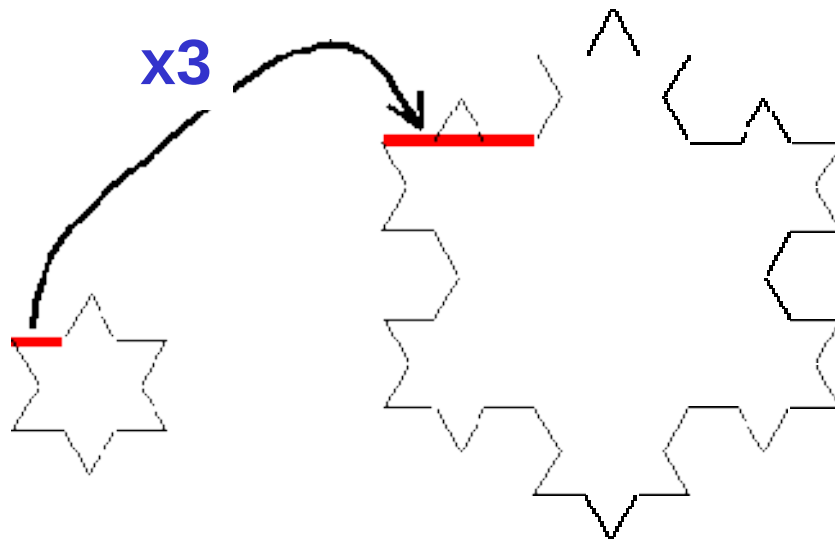


$1/8$

# Dimension de similitude



**Courbe de  
Von Koch**



**Dilatation d'un facteur 3,  
Longueur x 4**

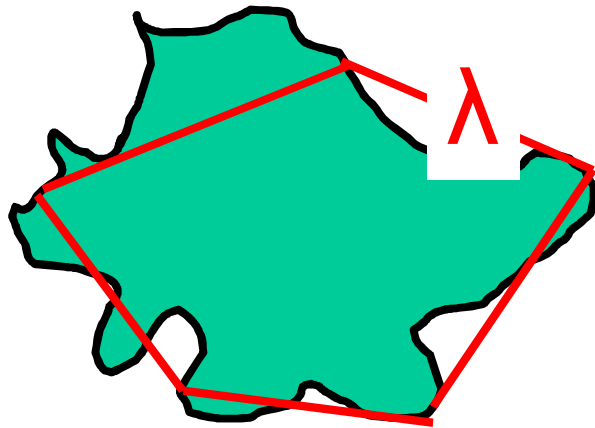
**Dimension de similitude  
D telle que  $3^D = 4$**

$$D = \log 4 / \log 3 = 1.26$$

**Dimension non entière intermédiaire entre ligne (D=1) et surface (D=2)**

# Dimension fractale

On mesure une côte avec  
une règle de longueur  $\lambda$



Périmètre  $P = N$  fois  $\lambda$

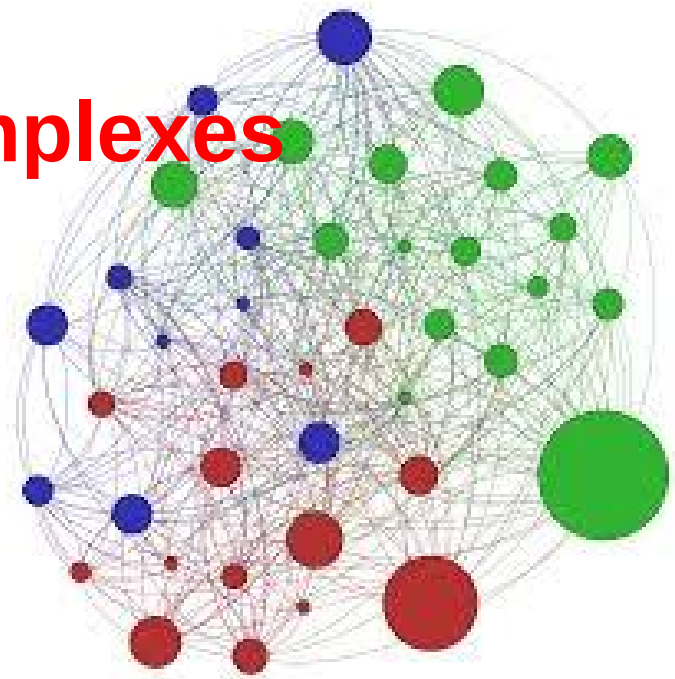
En général on constate que  
le périmètre mesuré suit une  
loi de puissance en fonction  
de  $\lambda$ :

$$P = \lambda^{(1-D)}$$

Cela traduit une structure  
fractale de l'objet mesuré

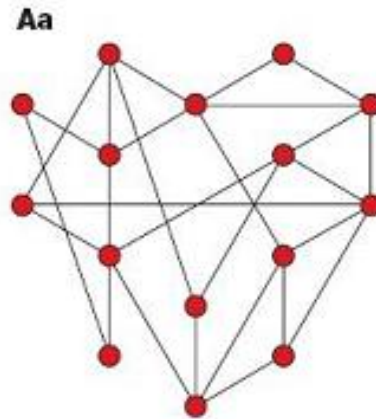
# Loi de puissance

- Introduction et définition
- Propriétés de la loi de puissance(LdP)
  - LdP et loi probabilités
  - LdP et loi d'échelle
  - ➔ ■ **LdP et graphes complexes**
  - LdP et SOC
- Exemples d'applicabilité
  - Economie
  - Réseaux
  - Linguistique
  - Sismique
  - Géographie
- Réflexion générale: le cygne noir

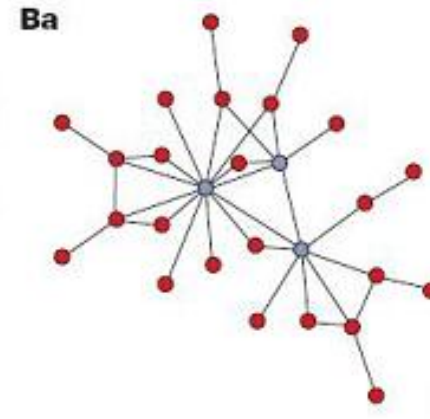


# Génération de graphes aléatoires ou « scale free »

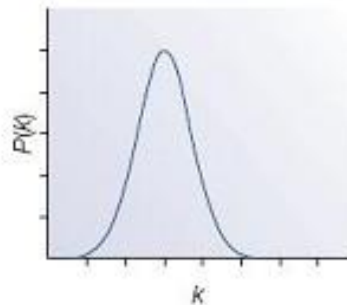
A Random network



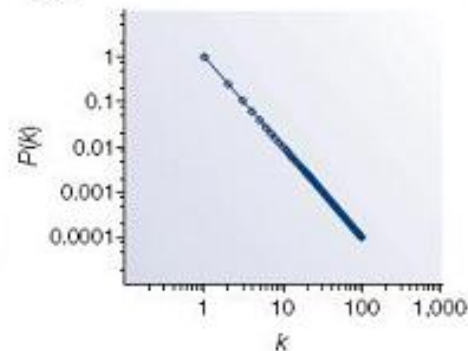
B Scale-free network



Ab



Bb

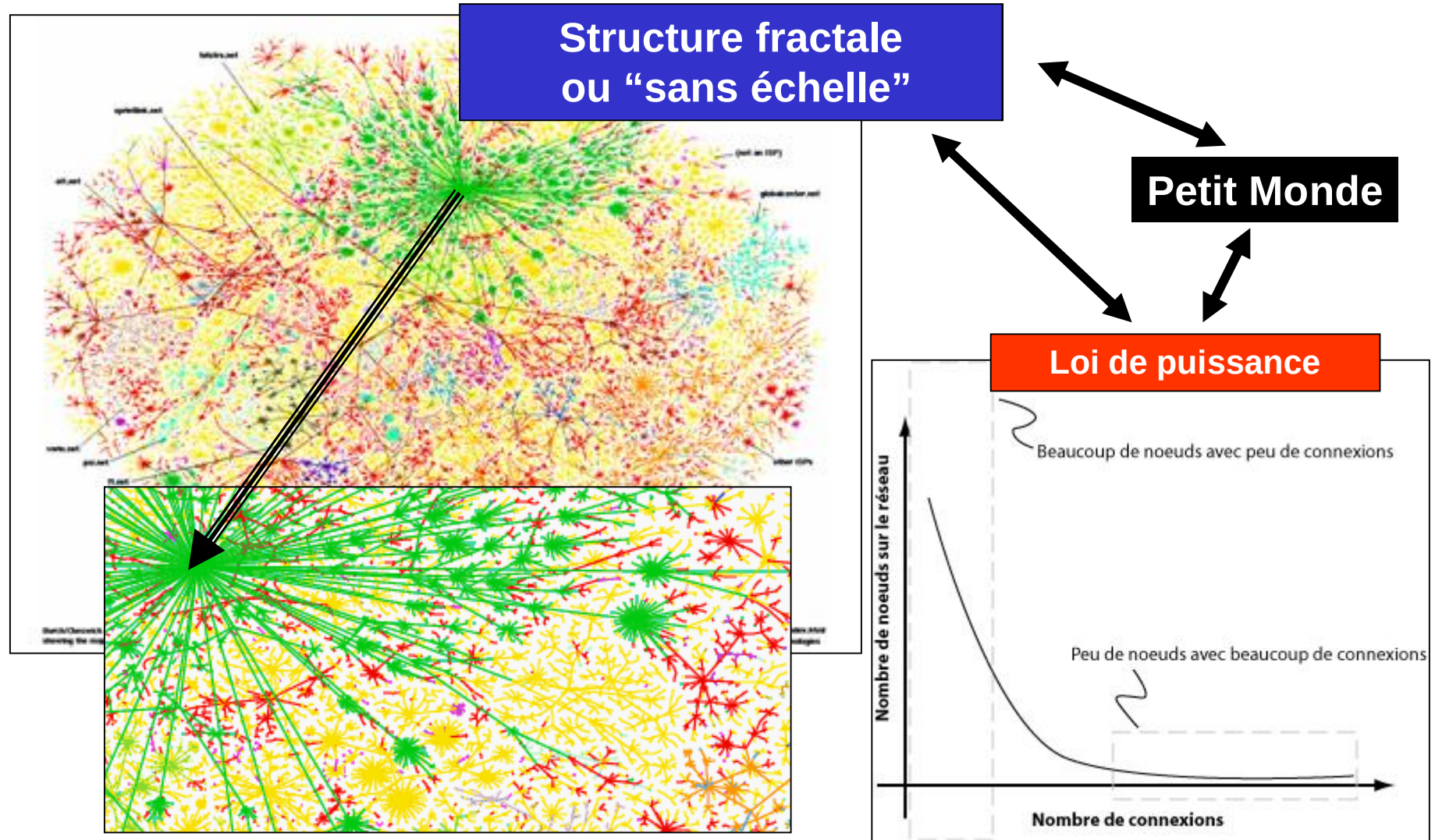


Echelle  
log log

En x, degrés  
En y, nombre de sommets

Un réseau *scale-free* (Ba) suit une distribution en loi de puissance des degrés (Bb) et non une loi binomiale (Ab) comme les graphes aléatoires (Aa)

# Graphes de terrain: 3 propriétés liées

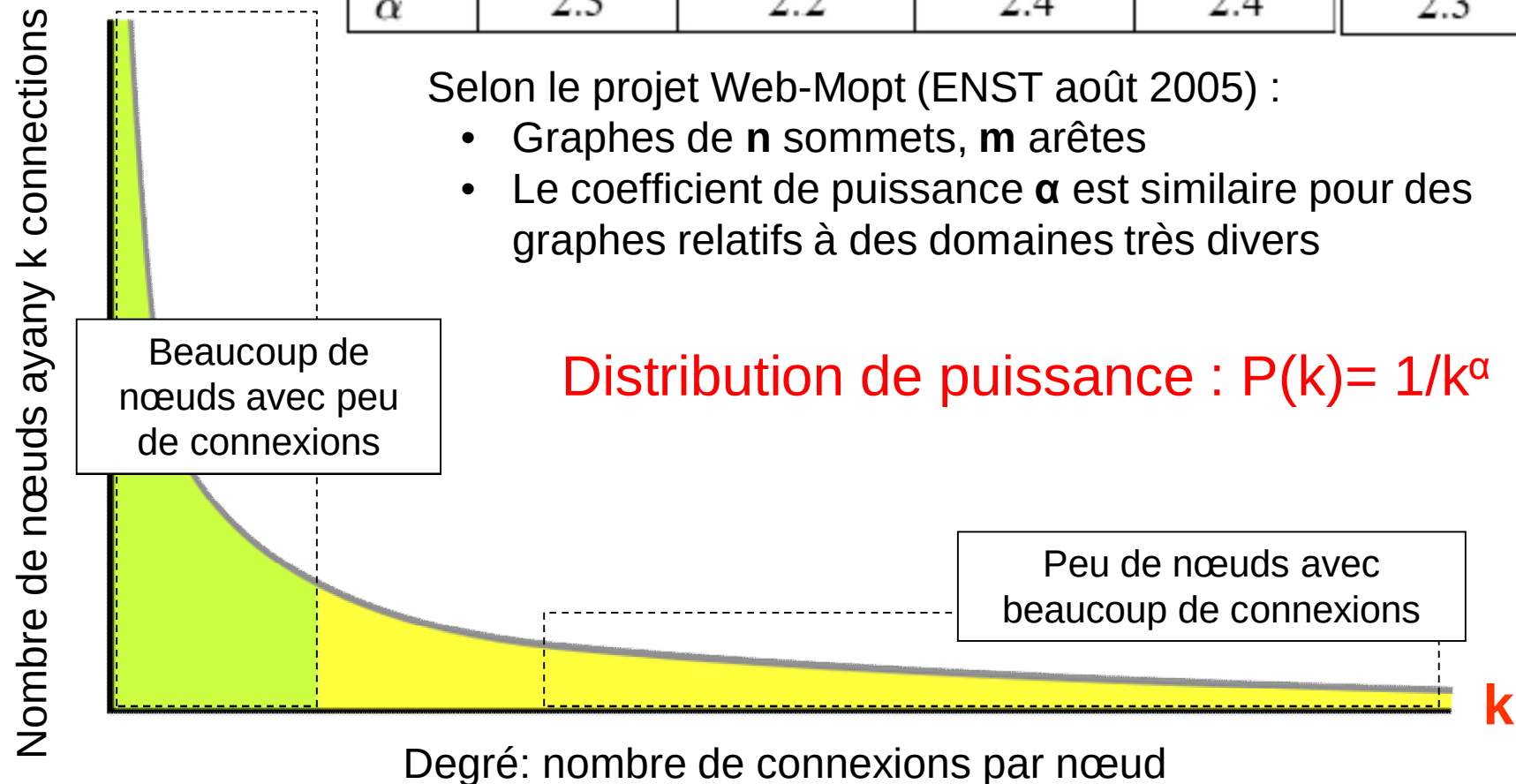


# Exemples de graphes en loi de puissance

|          | Internet | Actors   | Co-auth | Protein | Web     |
|----------|----------|----------|---------|---------|---------|
| $n$      | 228263   | 392340   | 16401   | 2113    | 325729  |
| $m$      | 320149   | 15038083 | 29552   | 2203    | 1090108 |
| $\alpha$ | 2.3      | 2.2      | 2.4     | 2.4     | 2.3     |

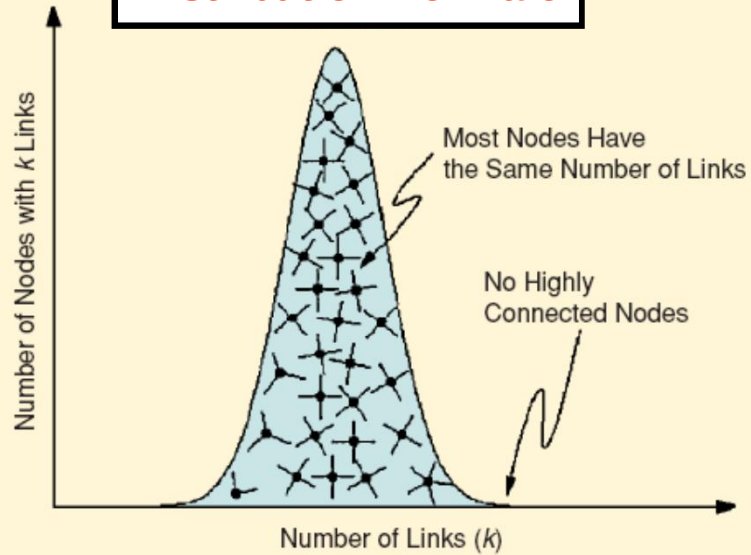
Selon le projet Web-Mopt (ENST août 2005) :

- Graphes de  $n$  sommets,  $m$  arêtes
- Le coefficient de puissance  $\alpha$  est similaire pour des graphes relatifs à des domaines très divers



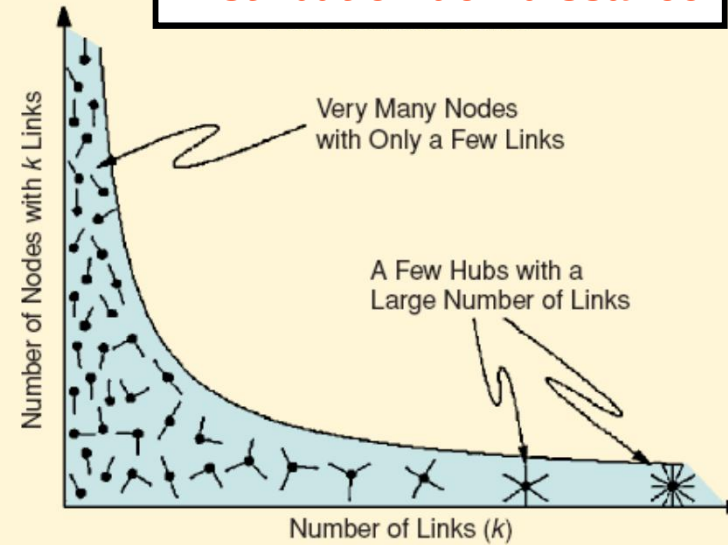
# Grands graphes (loi normale et LdP)

Distribution Normale



(a)

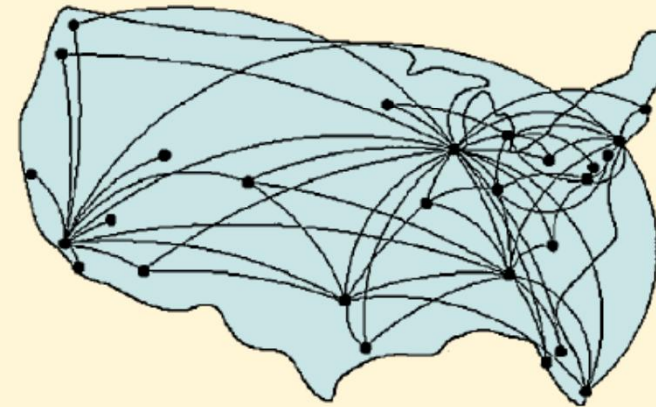
Distribution de Puissance



(b)



(c)



(d)

(Selon Barabasi)

# Systemes critiques auto-organisés (SOC)



- SOC est devenu un candidat solide pour l'explication d'un certain nombre de phénomènes naturels, tels que : tremblement de terre, éruptions solaires; fluctuations dans les systèmes économiques tels que les marchés financiers; la formation de paysage; les feux de forêts, les glissements de terrains, les épidémies, et l'évolution biologique et même les guerres...



# Processus de criticité auto-organisée

*Per Bak, Chao Tang, Kurt Wiesenfeld (1987):*

Les structures dissipatives oscillent constamment au voisinage d'un état critique à partir duquel se produisent des avalanches.



Per Bak

L'amplitude des avalanches est inversement proportionnelle à leur fréquence (loi de puissance en  $1/f$  ou  $f^{-1}$ ).

Exemples: tremblements de terre, avalanches.

*François Roddier*

CERN, le 16 novembre 2011

# Systemes critiques auto-organisés (SOC)

- Malgré leur grande diversité, ces systèmes que l'on désigne alors par **systemes critiques auto-organisés - ou SOC -** manifestent des propriétés similaires, notamment liant fréquence et amplitude de l'évènement selon une loi de puissance
- Le caractère invariant d'échelle des SOC nous ramène aux fractales et à la notion d'auto-similarité : ce sont les mêmes mécanismes qui déclenchent les évènements de faibles amplitudes et ceux beaucoup plus violents, lesquels ne représentent donc rien de remarquable.

**Constat empirique ou explication théorique?**

# Explication de la génération de LdP

## Plusieurs pistes d'explication théorique:

- Rattachement préférentiel:
  - Graphes (Barabasi)
  - Biologie (Yule)
  - Géographie (Simon)
- Optimisation de l'information (Mandelbrot)
- Auto organisation critique (SOC)



# Loi de puissance

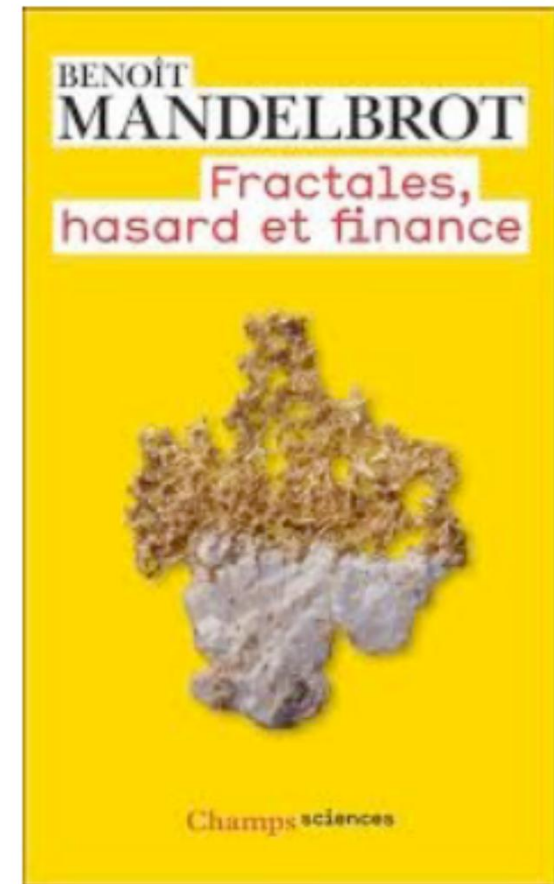
- Introduction et définition
- Propriétés de la loi de puissance(LdP)

- LdP et loi probabilités
- LdP et loi d'échelle
- LdP et graphes complexes
- LdP et SOC

## ➡ ■ Exemples d'applicabilité

- Economie
- Réseaux
- Linguistique
- Sismique
- Géographie

- Réflexion générale: le cygne noir



# Thèse: loi de puissance et économie



le cnam

ÉCOLE DOCTORALE Abbé Grégoire – ED 546

ÉQUIPE de RECHERCHE : LIRSA EA 4603

## THÈSE

présentée par :

**Philippe HERLIN**

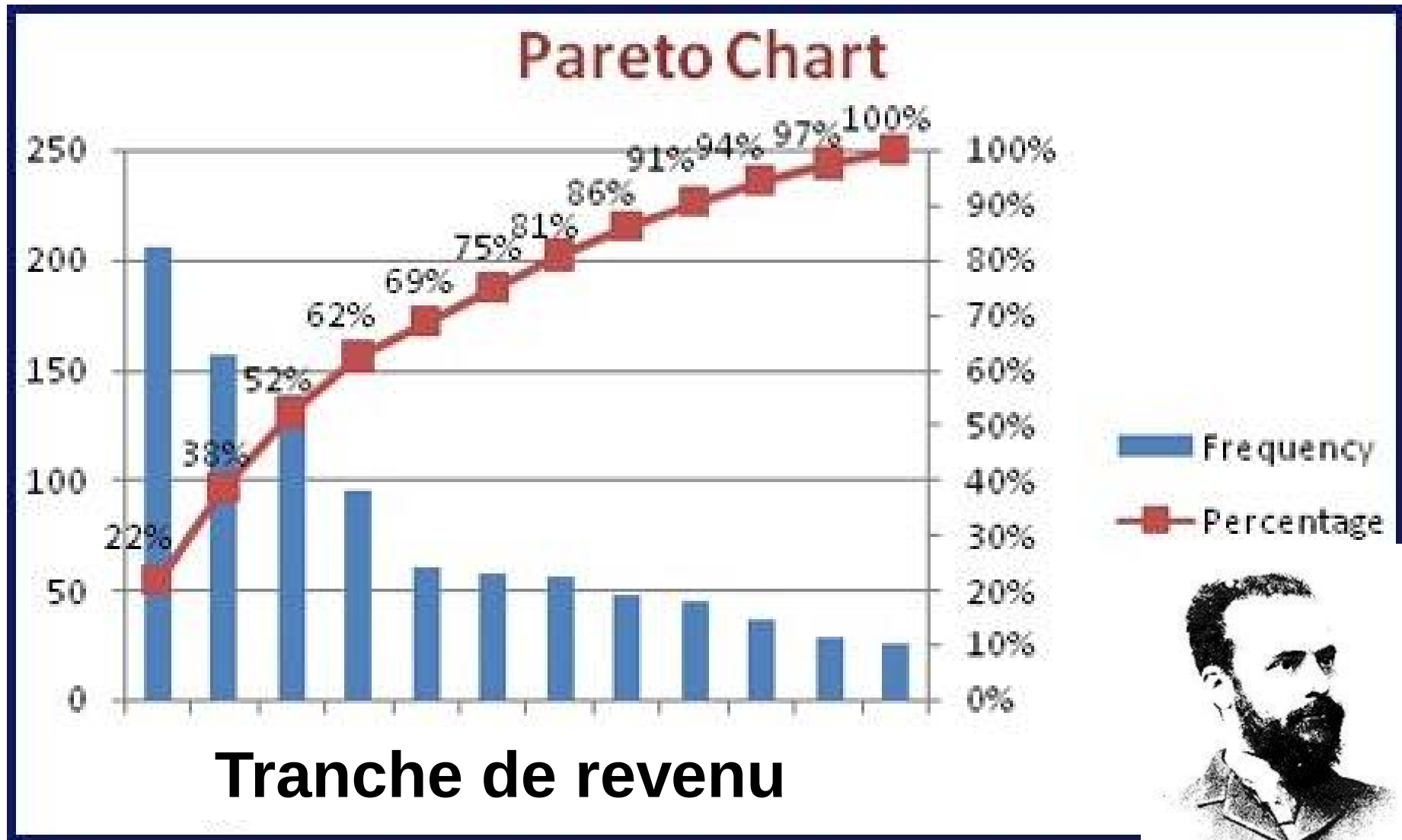
soutenue le : 19 décembre 2012

pour obtenir le grade de : **Docteur du Conservatoire National des Arts et Métiers**

Discipline/ Spécialité : Sciences de gestion / DOC 07 – Expertise et Ingénierie Financière

**La remise en cause du modèle classique de la finance  
par Benoît Mandelbrot et la nécessité d'intégrer les lois  
de puissance dans la compréhension des phénomènes  
économiques**

# Principe de Pareto (loi du 80/20: 1906)

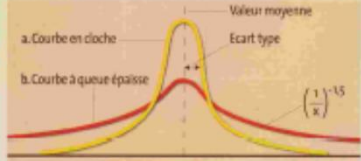


# La finance est plus compliquée que la physique

**MYTHE N° 1**

## Les marchés sont des « cloches »

Le modèle standard de la finance explique que les marchés obéissent à une distribution statistique de type gaussienne, autrement appelée courbe en cloche (a). C'est la même qui explique comment sont distribués les tailles des individus autour de la valeur moyenne, ou les notes d'une classe... A cette aune, l'analyse d'un siècle d'évolution de l'indice boursier new-yorkais, le Dow Jones (de 1916 à 2000), prédit que 58 jours seulement ont des variations supérieures à 3,4 % (en plus ou en moins). Or, en réalité, il y en a eu 1001, rappelle Mandelbrot dans son livre ! Et pour des écarts de 4,5 %, la théorie prévoit 6 jours tandis qu'en réalité il y en a eu 366...



a. Courbe en cloche  
b. Courbe à queue épaisse

(a) Distribution gaussienne, courbe en cloche : il y a 95 % de chances de se trouver à moins de deux écarts type de la moyenne.  
(b) Distribution dominée par les extrêmes, courbe à queue épaisse : la probabilité de gagner dix fois le salaire minimum est 3,2 % =  $(10)^{-1}$ , la majorité des richesses appartient à peu de gens.

**MYTHE N° 2**

## Moyenne et variance sont les mamelles de la finance

La remise au goût du jour, à la fin des années 1900, des travaux du Français Louis Bachelier a facilité la vie des opérateurs. Avec une statistique gaussienne, deux paramètres suffisent à décrire les cours : la moyenne et la variance. Cette dernière est une mesure de l'écart à la moyenne. C'est-à-dire qu'un prix vaut 100 à plus ou moins 5 (5 est l'écart type et 5<sup>2</sup> est alors la variance). Malheureusement moyenne et variance n'ont, pour Mandelbrot, pas grand sens... « Ça finit devant les yeux », aime-t-il à dire. Il y a quarante ans déjà, il montrait que les variables réelles pouvaient être infinies ! En effet, d'autres lois de distribution, dites à queues épaisses ou en lois de puissance (voir courbe (b) ci-dessus), possèdent cette curieuse propriété mathématique, qui, en outre, décrit mieux la réalité ! Mais pour la moyenne. Comment connaître le chiffre d'affaires moyen des sociétés de logiciels aux Etats-Unis ? Difficile vu que, toujours selon Mandelbrot, « chaque étatiste aux Etats-Unis vend du logiciel ». Le nombre de sociétés est donc quasi infini. A l'inverse, enlevez une seule société comme Microsoft et le résultat s'effondre... Est-ce la moyenne...

**MYTHE N° 3**

## Les événements extrêmes sont rares

En 1929, la Bourse de New York chute de 6,8 %. C'est la troisième plus importante, après -3,5 % le 4 août et -4,4 % une semaine avant. Or, selon le modèle standard, un tel événement n'avait qu'une chance sur 200 000 de se produire (soit une fois en 100 000 ans). Et il n'y avait qu'un seul événement de 200 milliards d'avoir cette série de trois baisses... Faux, rappelle Mandelbrot. En 1997, le Dow Jones a décroché de 7,7 % en une semaine. En 1987, c'était bien pire : -29,2 %. C'est encore un effet pervers des courbes en cloche qui sous-estiment les accidents.

**MYTHE N° 4**

## Les agents sont rationnels

La deuxième fameuse que les opérateurs agissent de façon à ajuster parfaitement l'offre et la demande. Les prix reflètent cet équilibre. Mais les comportements sont bien différents. Dans un article paru dans le *Journal of Finance* de mai 2003, André Orléan, chercheur au Centre pour la recherche économique et ses applications, rappelle l'une des plus fameuses illustrations de l'irrationalité de la bulle Internet. Aux Etats-Unis, en 2000, les marchés comparent deux entreprises de vente de jouets. D'un côté, la société Toys-R-Us, 76 millions de dollars de bénéfices pour 11 milliards de chiffre d'affaires dans 1156 magasins. De l'autre, eToys, jeune start-up Internet, avec 28 millions de dollars de pertes pour 30 millions de chiffre d'affaires. En Bourse, la seconde est évaluée à un tiers de plus que la première ! En 2001, elle fait faillite... Où est passée la raison ?

**Les marchés sont efficaces**

Cette notion dérive de la précédente. Comme les agents sont rationnels, les prix reflètent parfaitement l'information disponible et il est impossible de gagner sur le marché. Du moins à long terme. Ainsi le Dow Jones a crû de 2 % par an en moyenne sur un siècle. Mais 2 % correspondent à peu près, selon Daniel Zupendweber, de l'université Paris X-Nanterre, aux coûts de transaction. Opération blanche, donc. Pourtant la réalité est plus compliquée. De nombreuses anomalies sont détectées et exploitées sur les marchés pour gagner. Exemple : spéculer est plus profitable en janvier que les autres mois. Ou, au contraire, vendre et acheter les lundis est moins intéressant que le reste de la semaine. Ne rêvez pas, ces effets ne sont plus observés de nos jours... car la martingale ayant été dévonée, elle ne fonctionne plus. Pendant des années, le mythe de l'efficience a ainsi bel et bien été battu en brèche. Et continue de l'être dans le secret des salles de marché, où chacun est à l'affût de signaux riches de promesses. « Si notre modèle ne marche pas ou le public, sinon on le garde pour nous », est l'adage muré un en la matière.

Les événements extrêmes sont rares

Les marchés sont des « cloches »

Moyenne et variance sont les « mamelles de la finance »

Science et Avenir, Aout 2005

# Loi de puissance et économie

*« Rares sont les économistes qui semblent avoir compris que de telles invariances [les lois de Pareto, les lois de puissance] peuvent signifier pour le futur de notre science. En particulier, personne ne semble avoir réalisé que la recherche, et l'interprétation, d'invariants de ce type pourrait jeter les bases d'une théorie entièrement nouvelle. »*

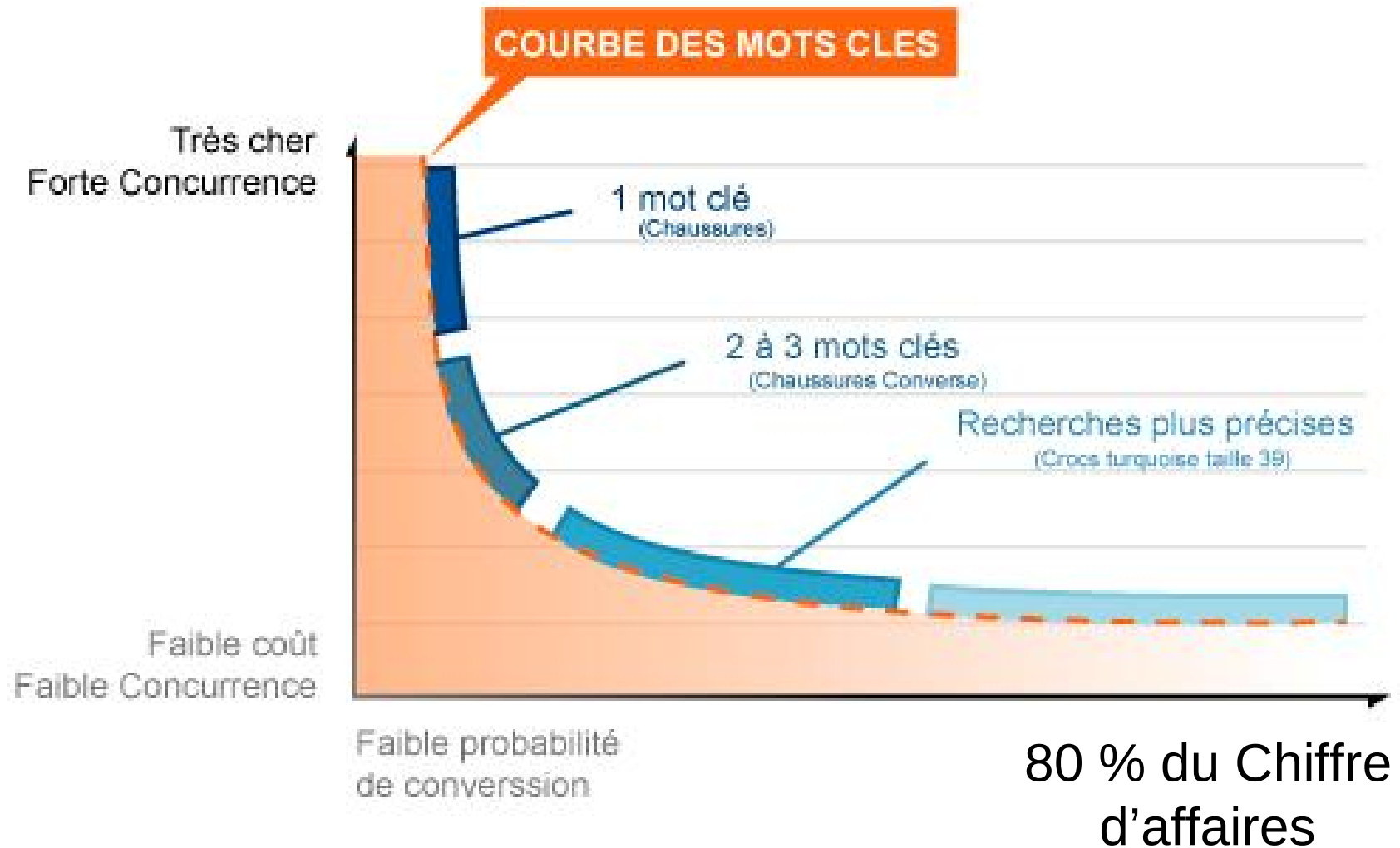
**Joseph Schumpeter**

Cité dans la Thèse de Philippe HERLIN

*Les fluctuations d'amplitude du marché sont inversement proportionnel à leur fréquence*

**Benoit Mandelbrot**

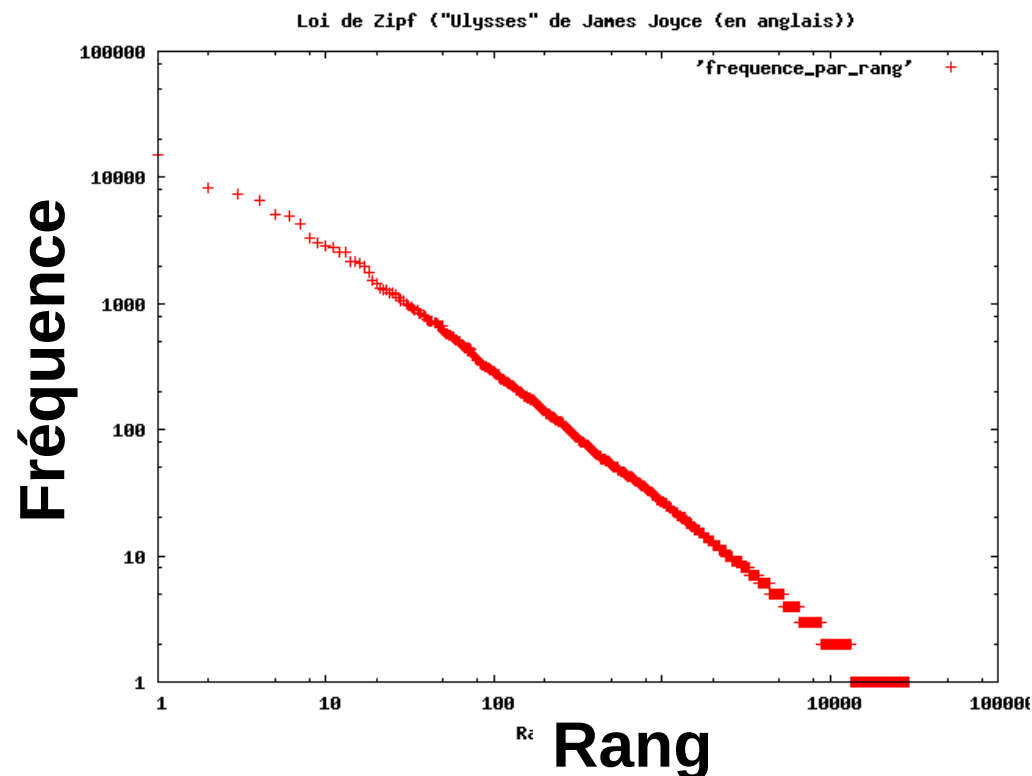
# Longue traine: concept marketing important



# Loi de Zipf et vocabulaire

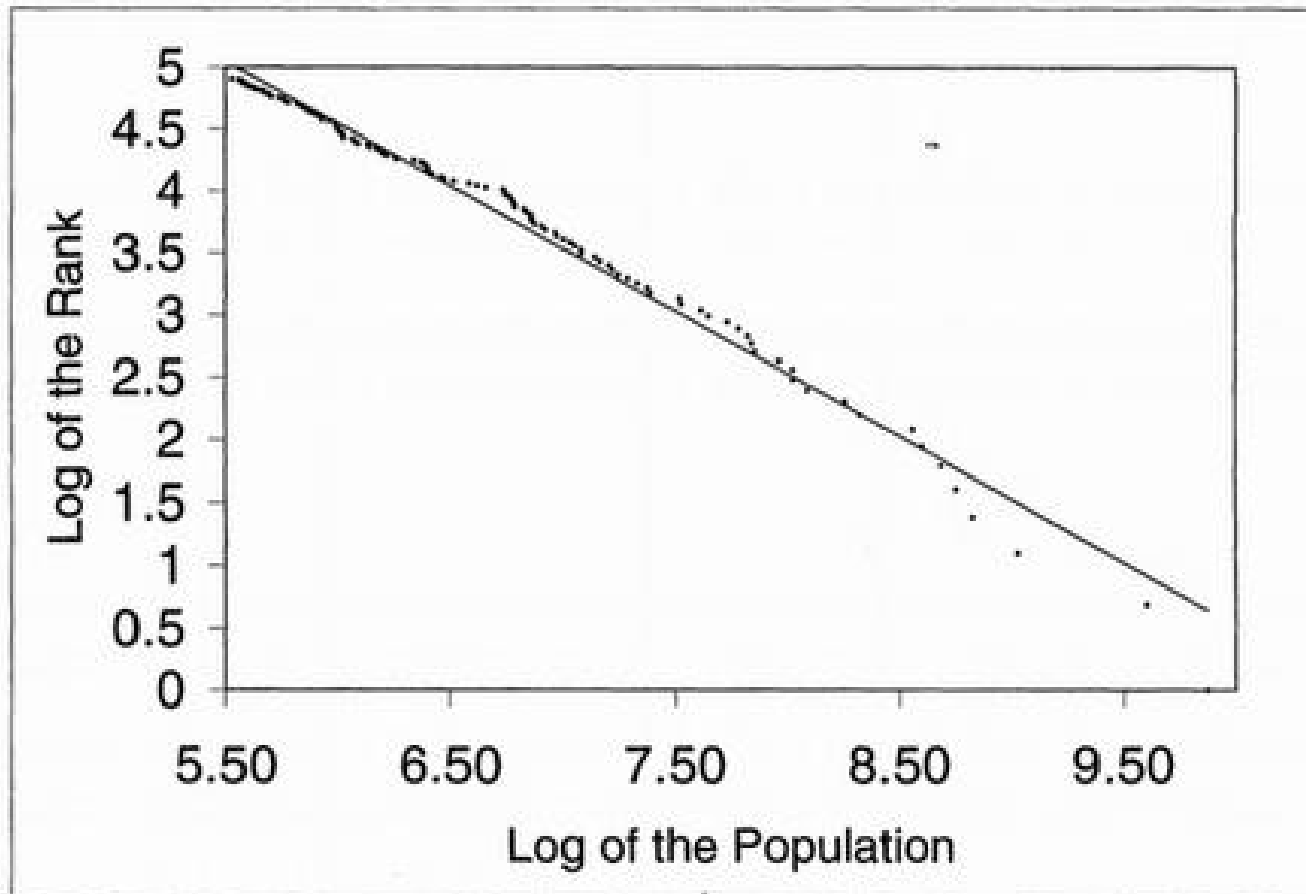
Ce que Zipf découvrit (ou plutôt redécouvrit car le phénomène avait déjà été repéré bien avant) est que la fréquence **F** d'usage d'un mot est inversement proportionnelle à son rang **R** dans le classement.

$$F = C/R$$



Analyse des mots  
d'ULYSSE de James  
Joyce  
(graphique log log)

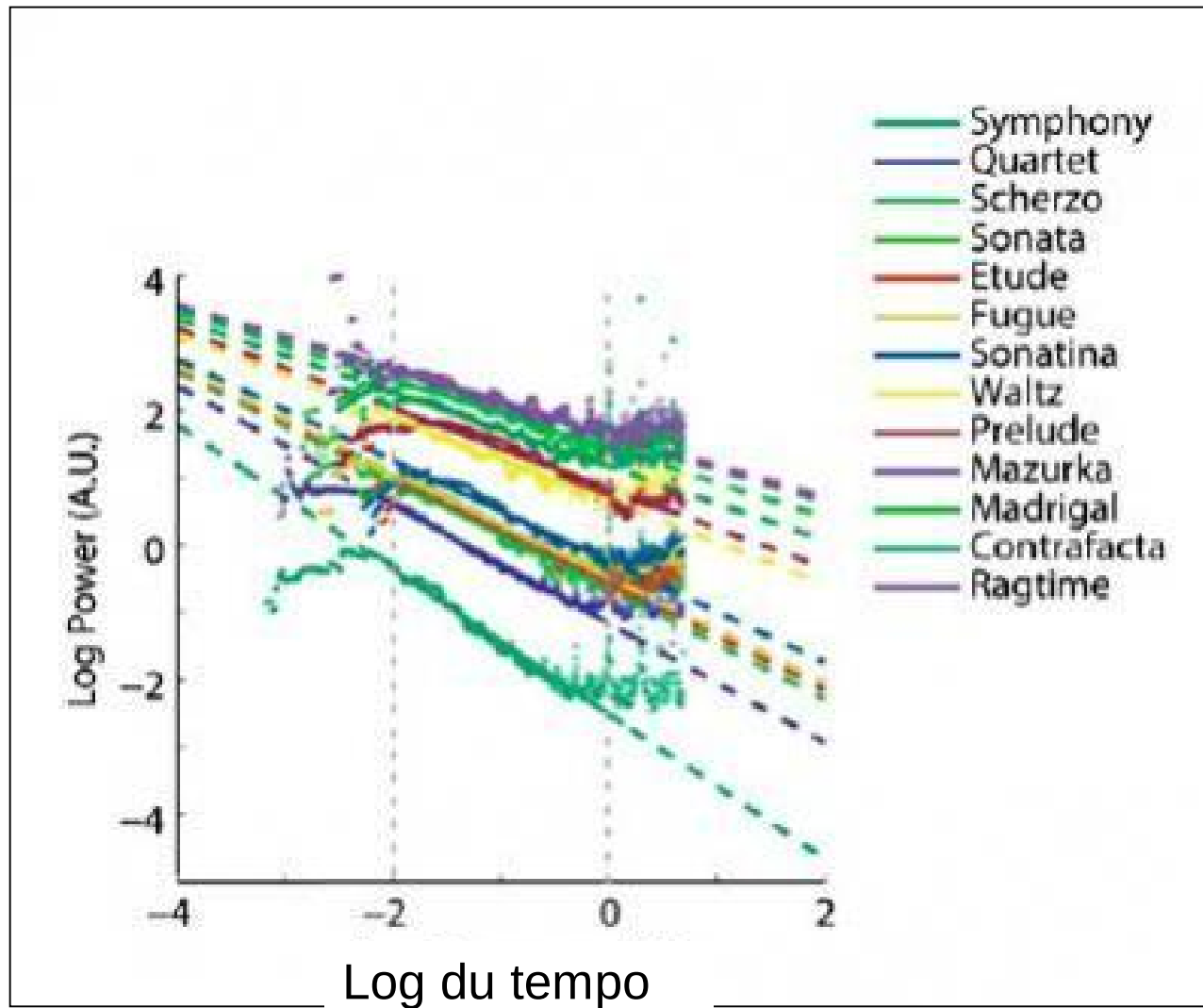
# Loi de Zipf constatée en géographie



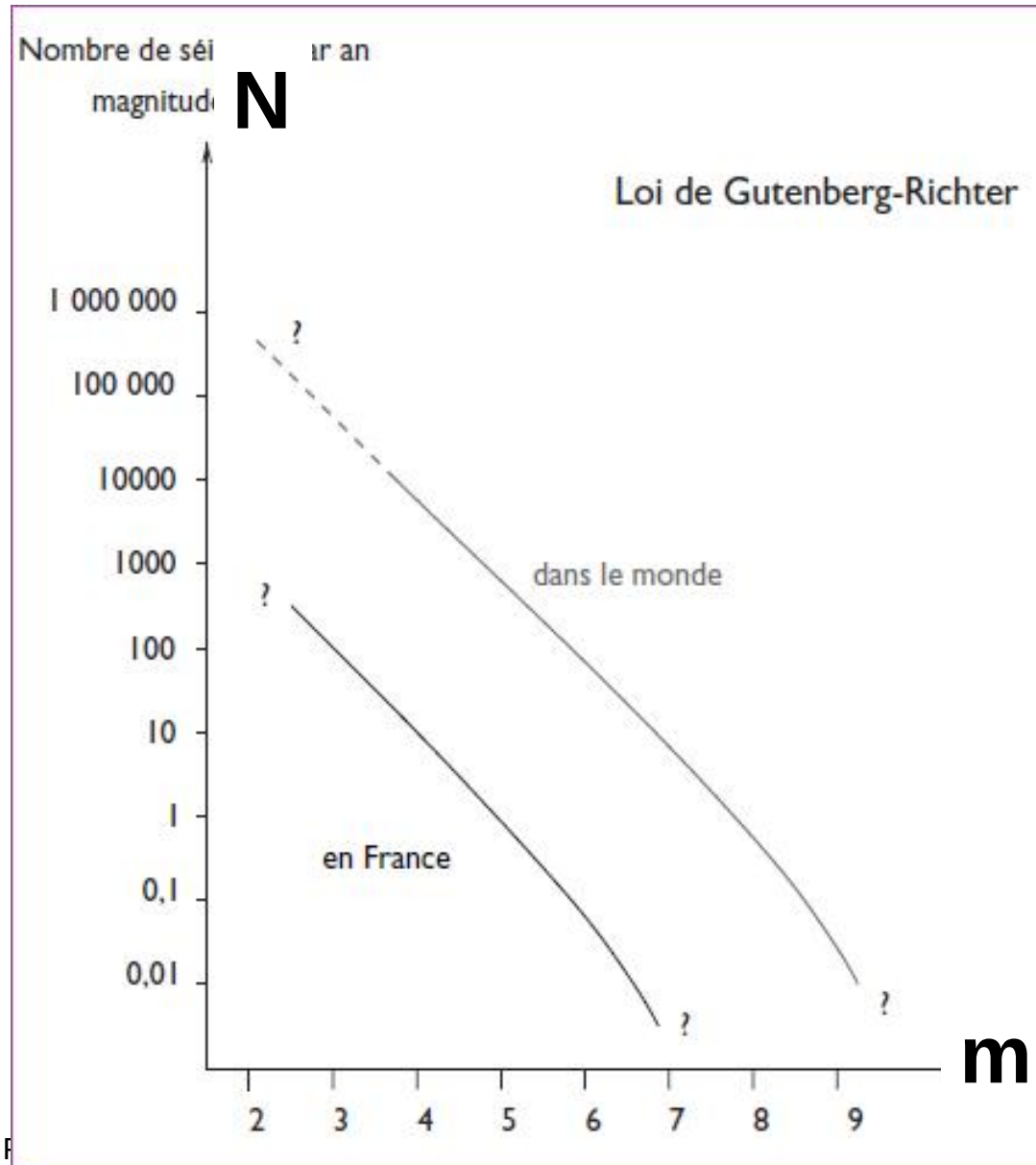
Classement  
des tailles des  
villes US en  
fonction de  
leur taille

FIGURE I  
Log Size versus Log Rank of the 135 largest U. S. Metropolitan Areas in 1991  
Source: Statistical Abstract of the United States [1993].

# Rythme et fréquence: loi de puissance



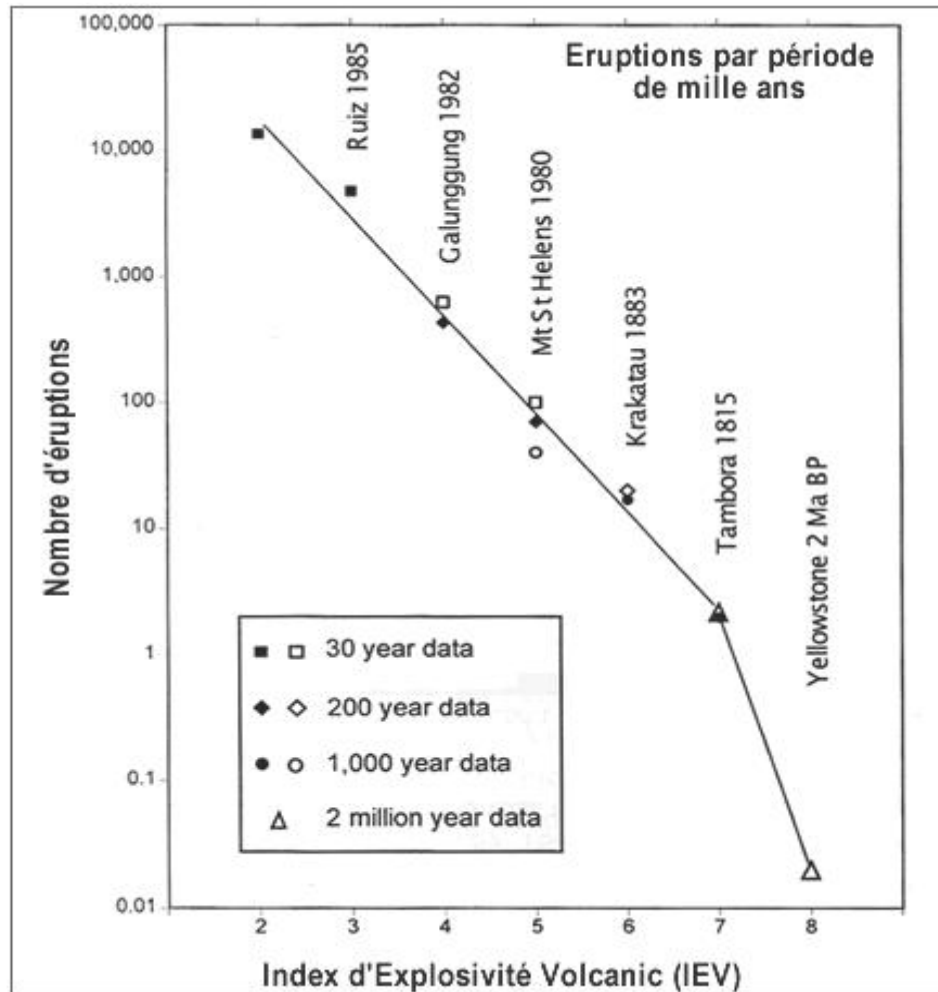
# Sismique: Gutenberg-Richter (1949)



**N**, nombre de séismes en fonction de la magnitude **m**

$$\text{Log}(N(m>M))=a-bM$$

# LdP et éruptions volcaniques



Loi de fréquence de la puissance des éruptions volcaniques dans le monde entier

# Taleb: théorie du cygne noir

La théorie du cygne noir développée par le philosophe Nassim Nicholas Taleb, est une théorie dans laquelle on appelle cygne noir un certain événement imprévisible qui a une faible probabilité de se dérouler (appelé « événement rare » en théorie des probabilités), et qui, s'il se réalise, a des conséquences d'une portée considérable et exceptionnelle. Taleb a, dans un premier temps, appliqué cette théorie au monde de la finance. En effet, les événements rares sont souvent sous-évalués en termes de prix.

