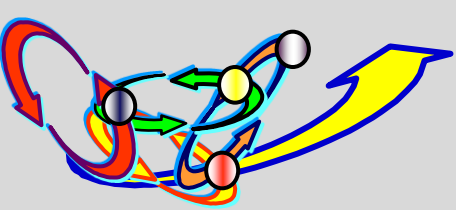


ÉMERGENCE – 27 janvier 2014

**DANS ET HORS DES FRONTIÈRES
DU CITRON DE WEGEL**

**LA LINÉARITÉ ET LES NON-LINÉARITÉS POUR LES NULS
ou *DE LA LINÉARITÉ AU CHAOS***

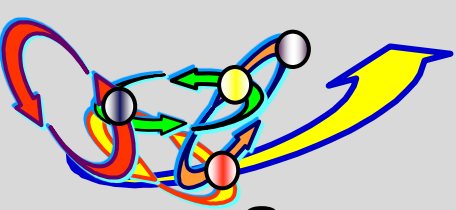
Patrick FARFAL



**Cette présentation est largement inspirée des cours
que j'ai dispensés pendant 20 ans sur
les Représentations et la Dynamique des Systèmes Linéaires**

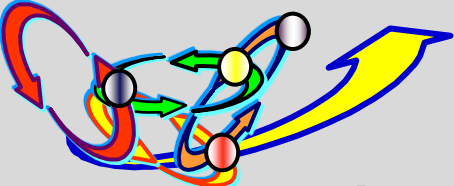
**Dans le fichier pdf qui sera diffusé, certaines planches comportent le symbole :
Elles sont pour les curieux(-ses) et peuvent être ignorées en première lecture ;
elles ne sont pas présentées aujourd'hui**





Sommaire

-  **Linéarité au sens des mathématiciens**
-  **Linéarité au sens des physiciens**
-  **Remarques**
-  **Exemples**
-  **Conditions initiales**
-  **Petites causes, grands effets**
-  **Systèmes Non-Linéaires**
-  **Citron de WEGEL**
-  **Opérabilité des Systèmes Linéaires**
-  **Opérabilité des Systèmes Non-Linéaires**
-  **Systèmes Non-Linéaires : Caractéristiques**
-  **Systèmes chaotiques**



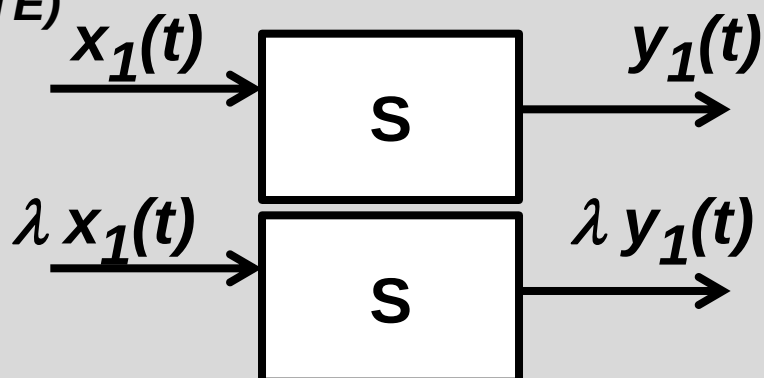
Linéarité au sens des mathématiciens

t peut être une autre variable que le temps

- Un Système est linéaire au sens des mathématiciens si LE PRINCIPE DE SUPERPOSITION LUI EST APPLICABLE:

Equation différentielle linéaire

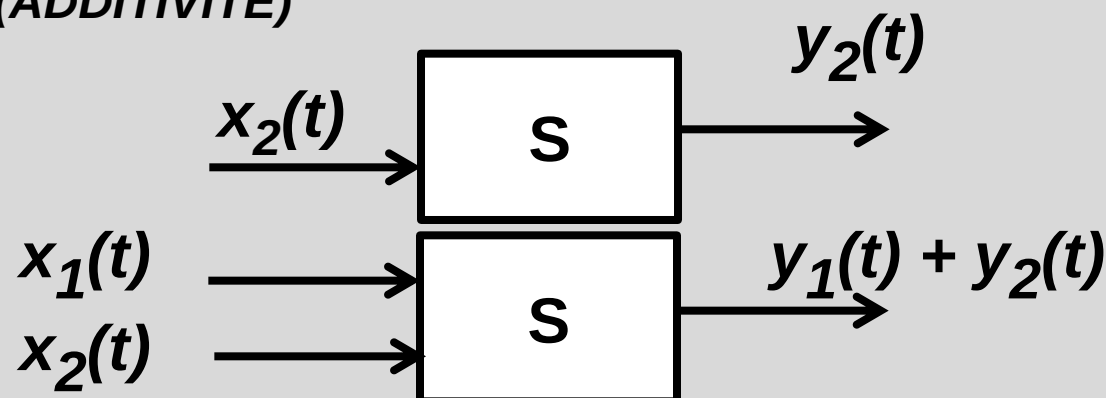
- Les effets sont proportionnels aux causes (HOMO-GÉNÉITÉ)

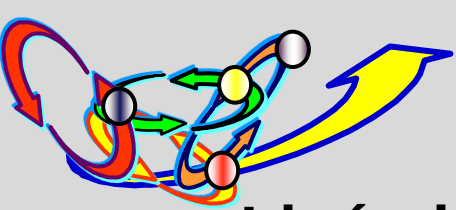


$$y''(t) + a(t) y'(t) + b(t) y(t) = c(t) x(t)$$

(exemple d'une équa. diff. du 2^e ordre)

- L'addition des causes entraîne l'addition des effets (ADDITIVITÉ)





Linéarité au sens des mathématiciens

t peut être une autre variable que le temps

- Un Système est linéaire au sens des mathématiciens si LE PRINCIPE DE SUPERPOSITION LUI EST APPLICABLE:



Equation différentielle *linéaire* (exemple) :

$$y''(t) + a(t) y'(t) + b(t) y(t) = c(t) x(t)$$

Si $y_1(t)$ est solution de :

$$y''(t) + a(t) y'(t) + b(t) y(t) = c(t) x_1(t)$$

et $y_2(t)$ solution de :

$$y''(t) + a(t) y'(t) + b(t) y(t) = c(t) x_2(t),$$

alors, $y_1(t) + y_2(t)$ est solution de :

$$y''(t) + a(t) y'(t) + b(t) y(t) = c(t) (x_1(t) + x_2(t))$$

et $\lambda y_1(t)$ est solution de :

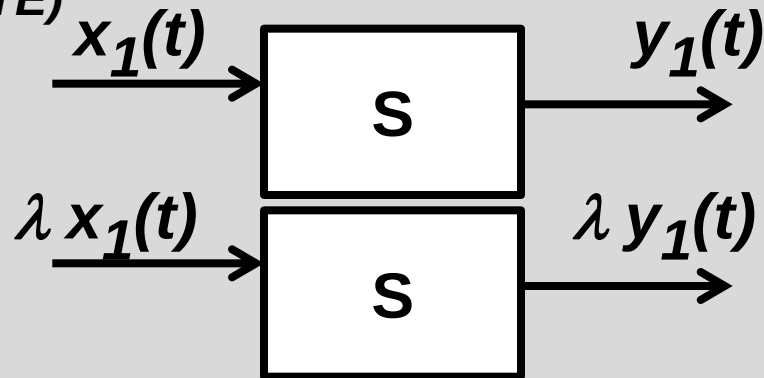
$$y''(t) + a(t) y'(t) + b(t) y(t) = c(t) \lambda x_1(t)$$

Et plus généralement :

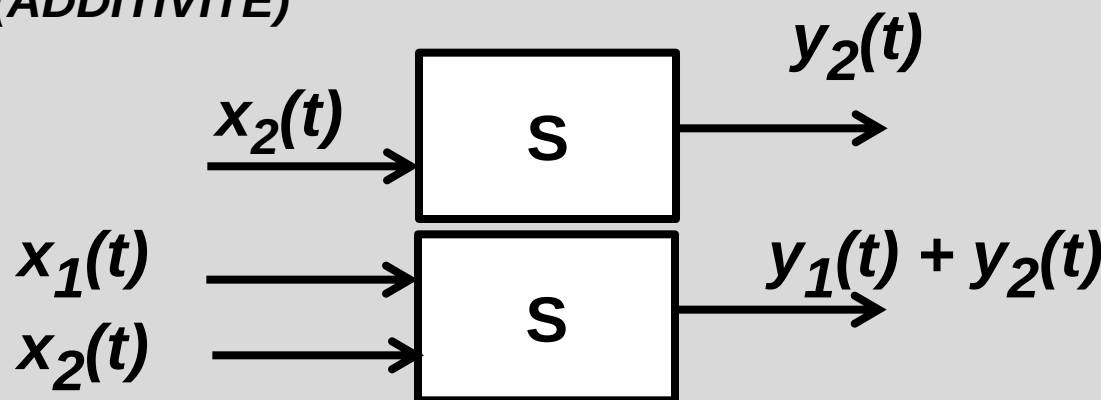
$\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$ est solution de :

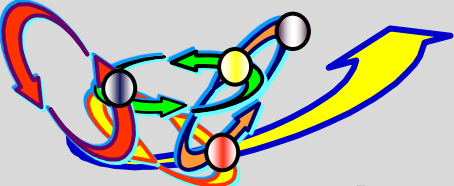
$$y''(t) + a(t) y'(t) + b(t) y(t) = c(t) (\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))$$

- Les effets sont proportionnels aux causes (HOMO-GÉNÉITÉ)



- L'addition des causes entraîne l'addition des effets (ADDITIVITÉ)

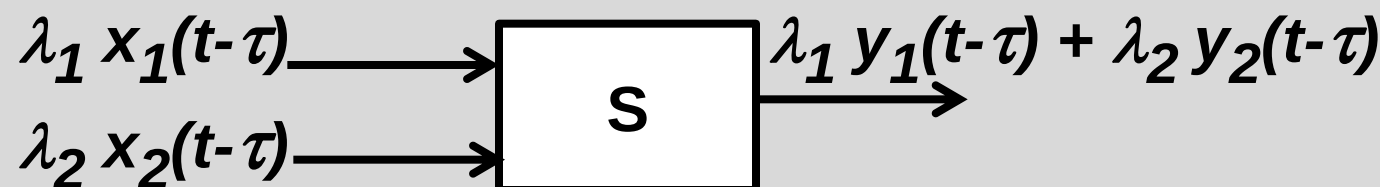
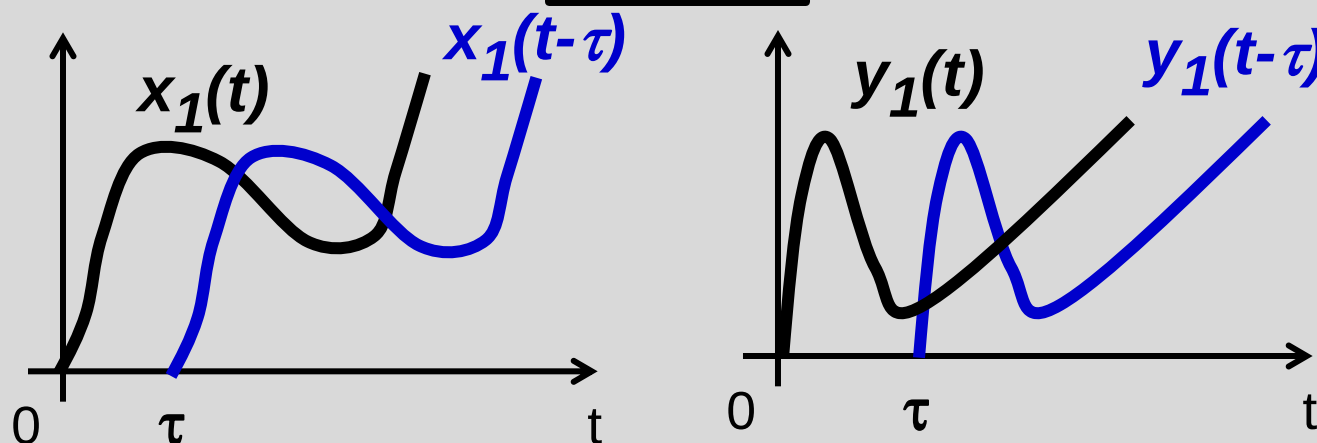
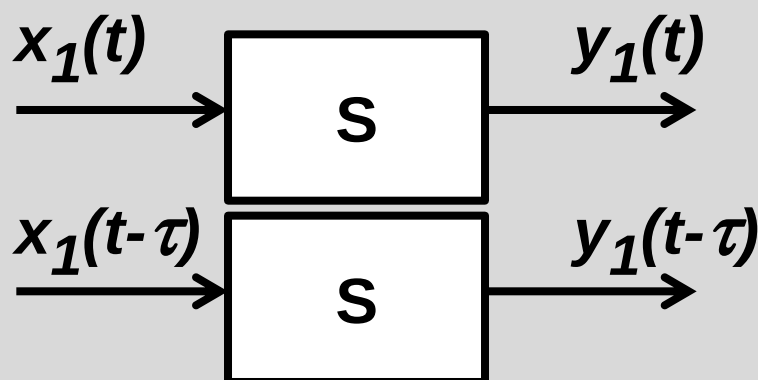




Linéarité au sens des physiciens

□ Un Système est linéaire au sens des physiciens si :

- Il est linéaire au sens des mathématiciens
- Et stationnaire



t est la variable temps

Equation différentielle

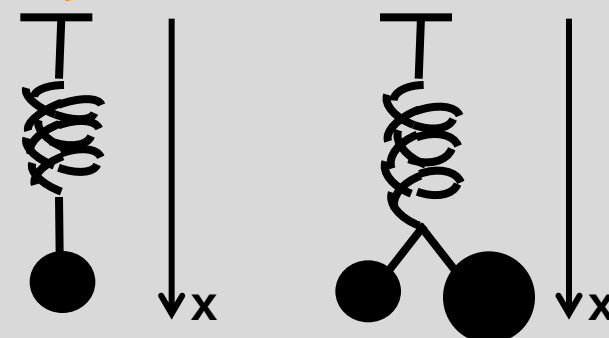
1) linéaire

2) à coefficients constants

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c x(t)$$

(exemple d'une équ. diff. du 2^e ordre)

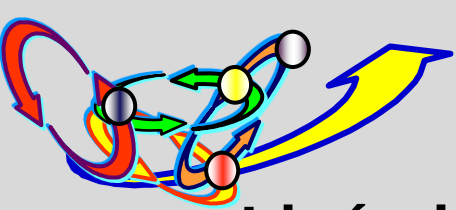
Très courant
(heureusement)



$$P1 \Rightarrow x1 = P1/k$$

$$P2 \Rightarrow x2 = P2/k$$

$$P1 + P2 \Rightarrow x1 + x2$$

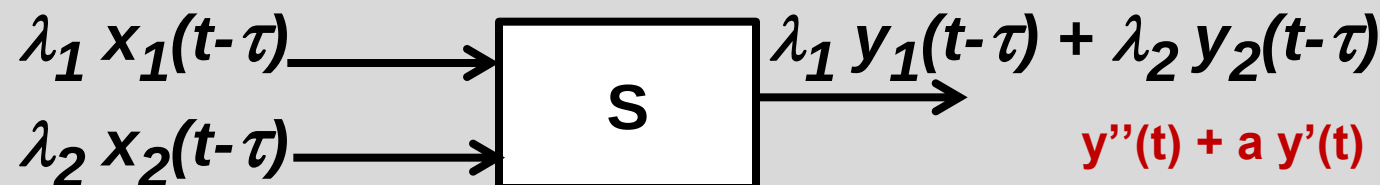
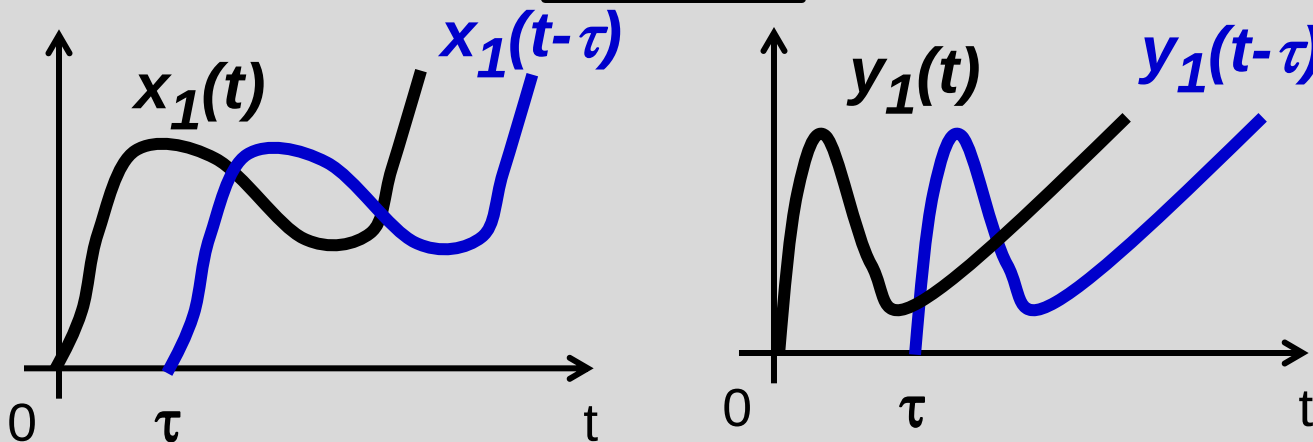
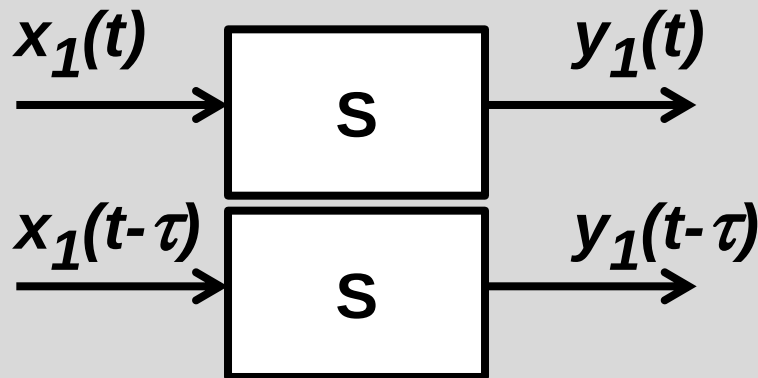


Linéarité au sens des physiciens

- Un Système est linéaire au sens des physiciens si :

➤ Il est linéaire au sens des mathématiciens

➤ Et stationnaire



$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c (\lambda_1 x_1(t-\tau) + \lambda_2 x_2(t-\tau))$$

t est la variable temps

Equation différentielle

1) *linéaire*

2) à coefficients constants (exemple) :

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c x(t)$$

Si $y_1(t)$ est solution de :

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c x_1(t)$$

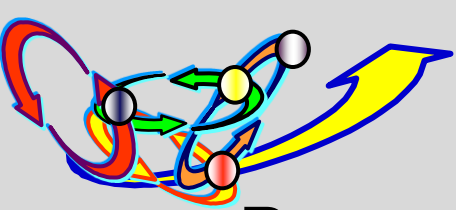
alors $y_1(t-\tau)$ est solution de :

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c x_1(t-\tau)$$

**Très courant
(heureusement)**

Et plus généralement :

$$\lambda_1 y_1(t-\tau) + \lambda_2 y_2(t-\tau) \text{ est solution de :}$$



Remarques

- Les **Equations Différentielles** peuvent être plus compliquées (même si l'approximation du 2^e ordre (en y'') est souvent assez pertinente) :

$$y'''(t) + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0 x(t)$$

- Ce qui vient d'être présenté vaut pour les **Systemes continus**

On traite de la même façon les **Systemes discrets** ou échantillonnés :

Equation « aux différences » :

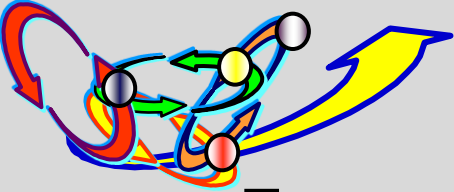
$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_k y_0 = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_k x_0$$

[Ecrit sous la forme :

$$y_k = 1/a_0 [b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \dots + b_k x_0 \\ - a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_k y_0]$$

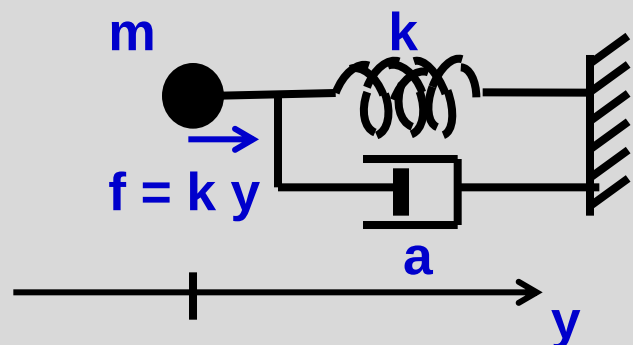
l'équation définit le *programme* d'un filtre numérique

(en Dynamique des Systemes, Filtre et Systeme sont en pratique synonymes)]



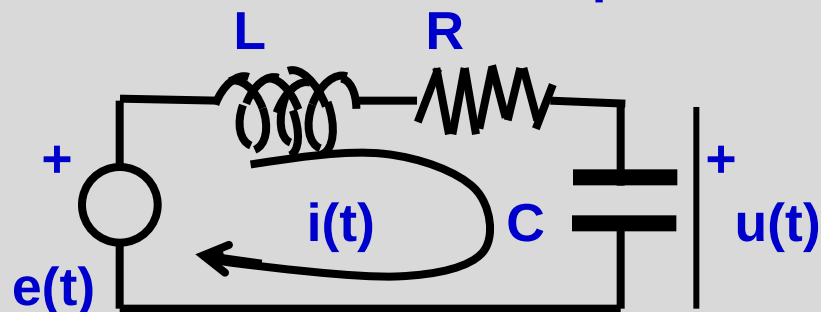
Exemples

□ Oscillateur harmonique libre amorti

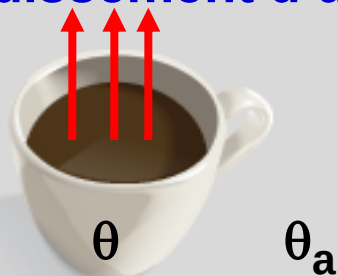


Le frottement (l'amortissement) est *visqueux* ;
s'il est sec, le Système devient non-linéaire

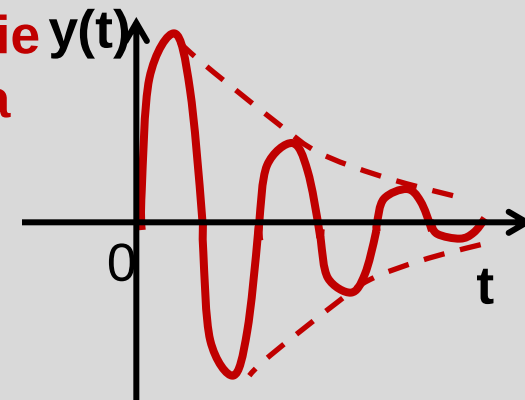
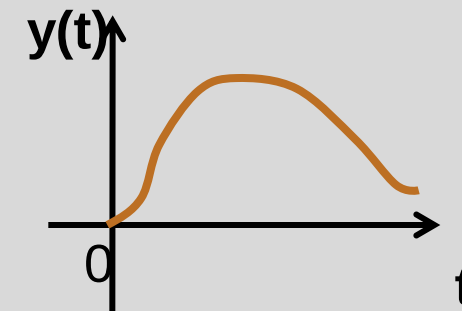
□ Oscillateur harmonique forcé amorti



□ Refroidissement d'une tasse de café

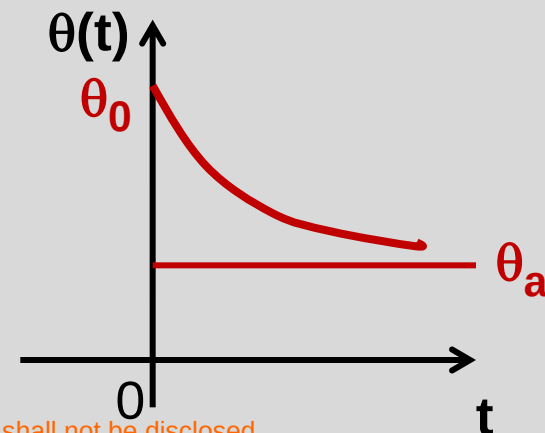


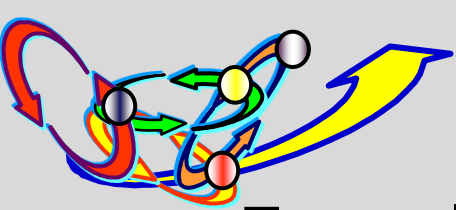
réponse apériodique
ou oscillatoire amortie
suivant la valeur de a



réponse apériodique ou oscillatoire
amortie

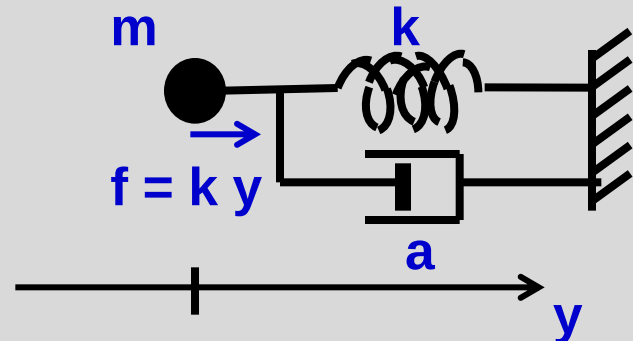
décroissance
exponentielle
de la température
(Newton)





Exemples

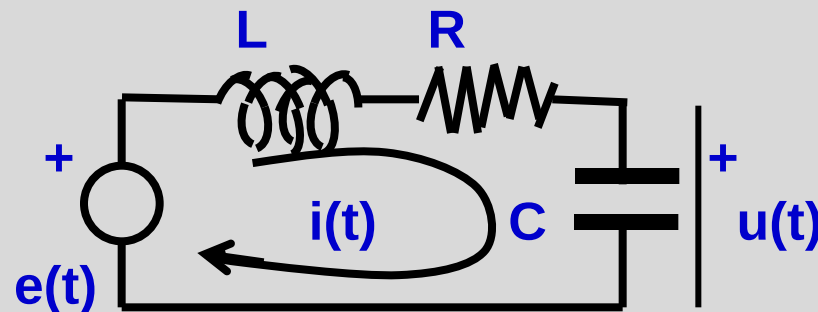
□ Oscillateur harmonique libre amorti



$m y''(t) + a y'(t) + k y(t) = 0$
(réponse aperiodique ou oscillatoire amortie)

Le frottement (l'amortissement) est *visqueux* ; s'il est sec, le Système devient non-linéaire

□ Oscillateur harmonique forcé amorti

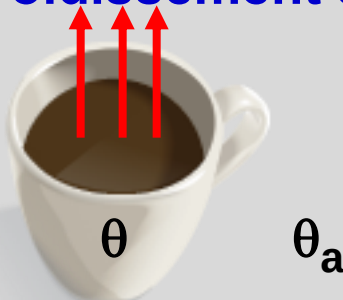


$L i'(t) + R i(t) + 1/C \int_0^t i(t) dt + u(0) = e(t)$

ou

$L i''(t) + R i'(t) + 1/C i(t) = e'(t)$
(réponse aperiodique ou oscillatoire amortie)

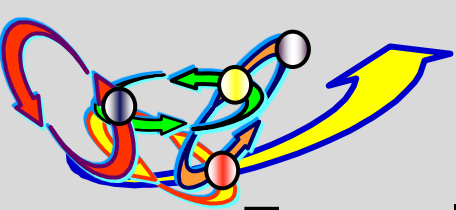
□ Refroidissement d'une tasse de café



$\theta'(t) = -k (\theta(t) - \theta_a), k > 0$
(Newton)

$\theta'(t) + k \theta(t) = k \theta_a$

$\tau = 1/k$ constante de temps thermique
(réponse exponentielle décroissante)



Exemples - suite

□ Modèle de Malthus

Evolution d'une population x (biologique ou autre)

n = taux de naissances

m = taux de mortalité des individus

⇒ **Croissance exponentielle de x si $n > m$**

□ Modèle keynésien en économie fermée (1936) – mécanisme des cycles

Y_t : revenu année t

C_t : consommation année t

I_t : investissement année t

$$Y_t = C_t + I_t$$

On décide p. ex. que l'investissement est proportionnel à la variation espérée du revenu

⇒ **Cycles possibles**

□ Mécanisme des cycles (autre modèle)

utilisant le multiplicateur $s = \Delta Y / \Delta I$

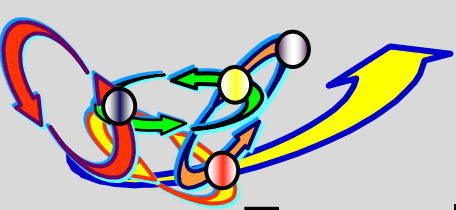
⇒ **Réponses possibles :**

convergence vers un équilibre

croissance explosive

cycle divergent

cycle amorti



Exemples - suite

□ Modèle de Malthus

Evolution d'une population x (biologique ou autre)

n = taux de naissances

m = taux de mortalité des individus

⇒ Croissance exponentielle de x si $n > m$

$$\begin{aligned}x(k+1) &= x(k) + n x(k) - m x(k) \\x(k+1) &= (1 + n - m) x(k)\end{aligned}$$

□ Modèle keynésien en économie fermée (1936) – mécanisme des cycles

Y_t : revenu année t

C_t : consommation année t

I_t : investissement année t

On décide p. ex. que l'investissement est proportionnel à la variation espérée du revenu ⇒ cycles possibles

Equation d'équilibre :

$$Y_t = C_t + I_t$$

Fonction de consommation :

$$C_t = c Y_t \text{ avec } 0 < c < 1, \text{ ex. } 0,7$$

$$I_t = k (Y_t - Y_{t-1}),$$

k coeff. marginal de capital (ex. 0,5)

$$Y_t = [(c-k)/(1-k)] Y_{t-1}$$

oscillatoire si $(c-k)/(1-k) < 0$ ou $c < k < 1$

□ Mécanisme des cycles (autre modèle) utilisant le multiplicateur $s = \Delta Y / \Delta I$

Réponses possibles :

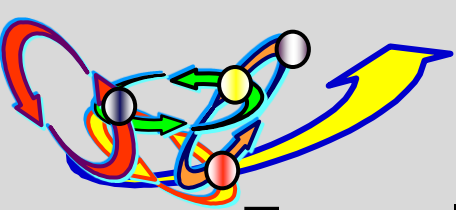
Convergence vers équilibre, croissance

explosive, cycle divergent ($s = 0,3$, $k = 0,5$), cycle amorti

$$I_t = s Y_t - a$$

$$I_t = k (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + b$$

$$Y_t = k/s (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + (b-a)/s$$



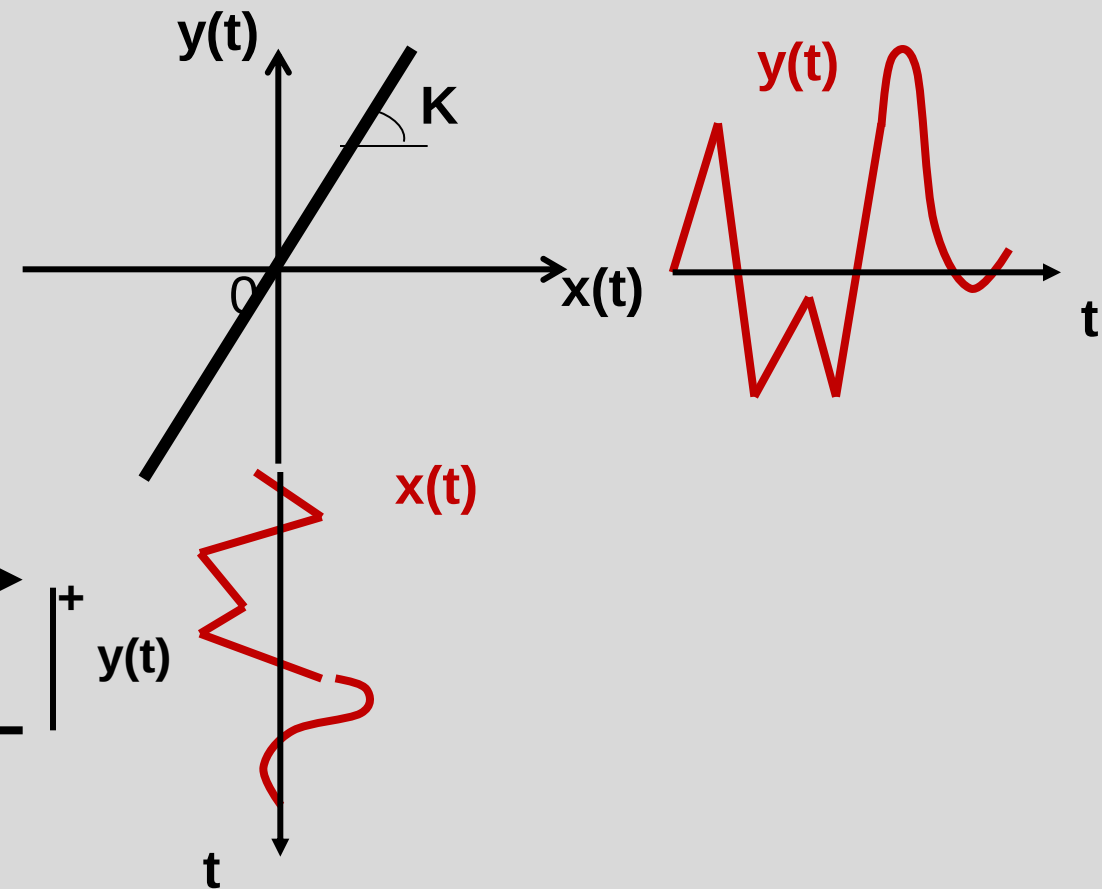
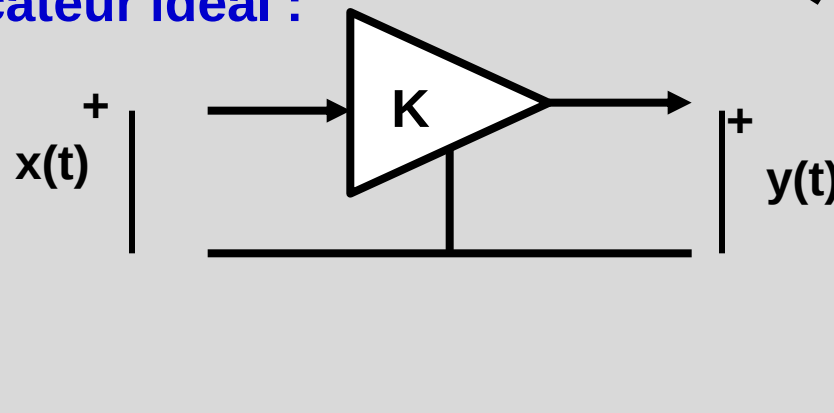
Exemples - suite et fin

□ Le Système Linéire le plus simple :

$$y(t) = K x(t)$$

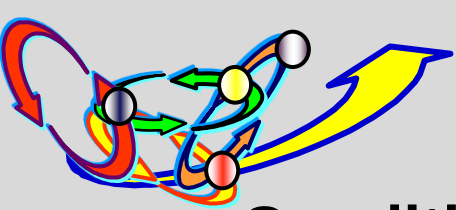
Relation « statique » entre y et x =
Caractéristique de transfert
Si droite = *Gain* K (même si $K < 1$)

Ex. : Amplificateur idéal :

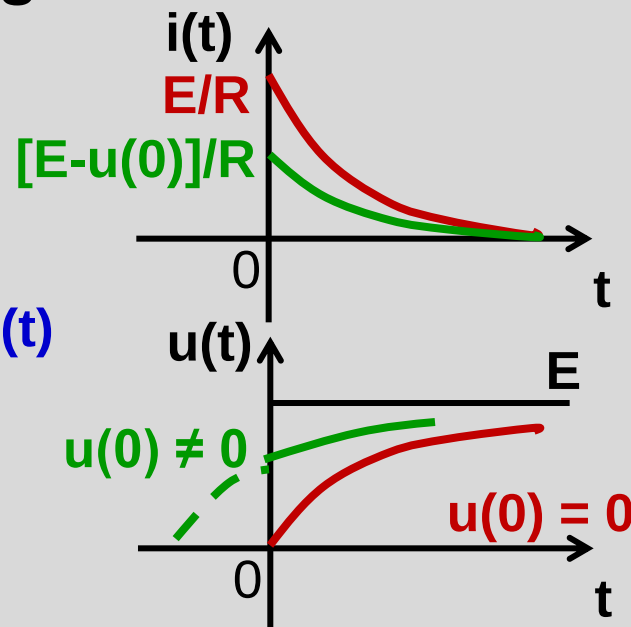
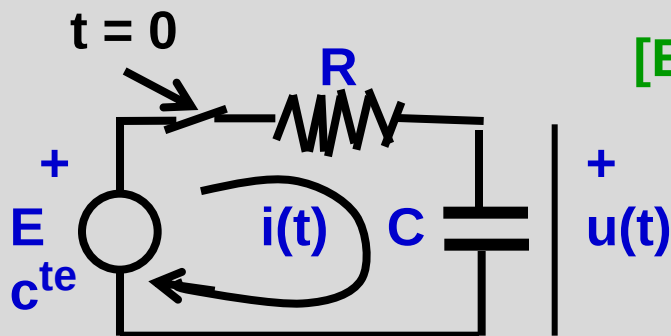


Intérêt :

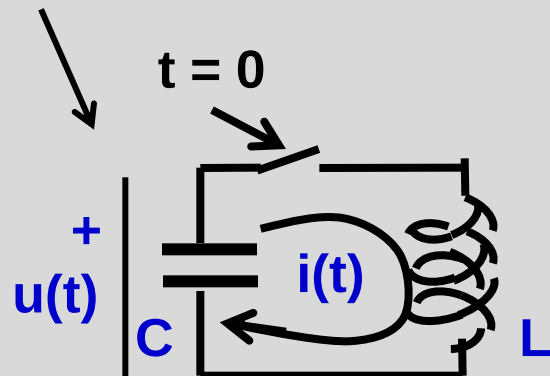
Les SN-L se définissent très souvent par leur caractéristique de transfert (N-L)



Conditions Initiales

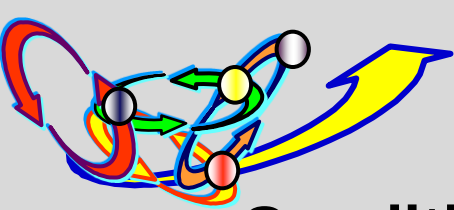


Condensateur chargé :
 $u(0) = C.I.$

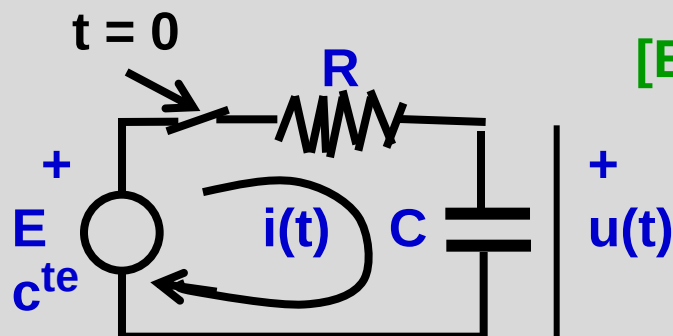


Oscillateur harmonique
 non amorti
 Amplitude des oscillations
 proportionnelle à $u(0)$

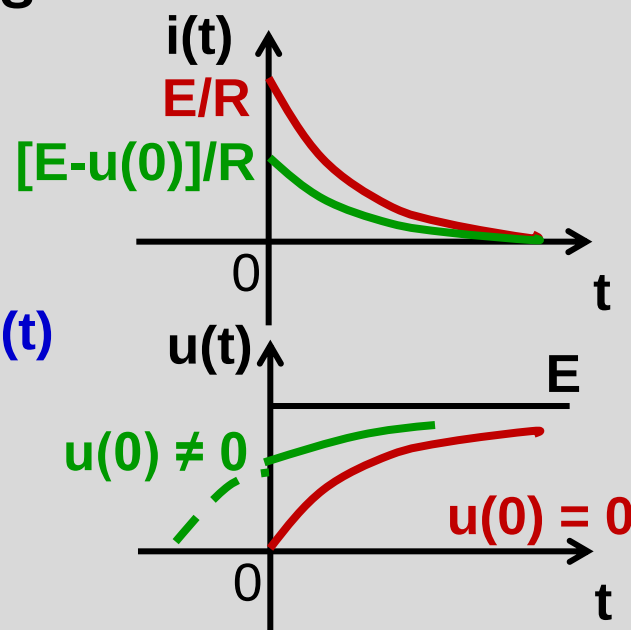
- ❑ Les Systèmes Linéaires sont sensibles aux Conditions Initiales !
- ❑ En particulier l'amplitude des oscillations d'un SL dépend des C.I.



Conditions Initiales



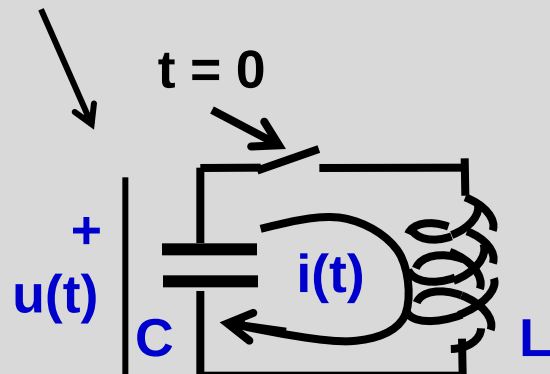
Condensateur chargé :
 $u(0) = C.I.$



$$-E + R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0) = 0$$

$$i'(t) + (1/RC) i(t) = 0$$

$$u(t) = E - [E - u(0)] e^{-t/RC}$$

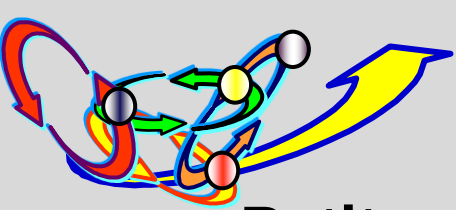


Oscillateur harmonique
non amorti
Amplitude des oscillations
proportionnelle à $u(0)$

$$i''(t) + i(t) / (LC) = 0$$

$$i(t) = u(0) (C/L)^{1/2} \cos t/(LC)^{1/2}$$

- ❑ Les Systèmes Linéaires sont sensibles aux Conditions Initiales !
- ❑ En particulier l'amplitude des oscillations d'un SL dépend des C.I.



Petites causes, grands effets

□ Réponses d'un Système Linéaire

- Libre $rl(t)$
- Forcée $rf(t)$

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c x(t)$$

$$y(t) = rl(t) + rf(t)$$

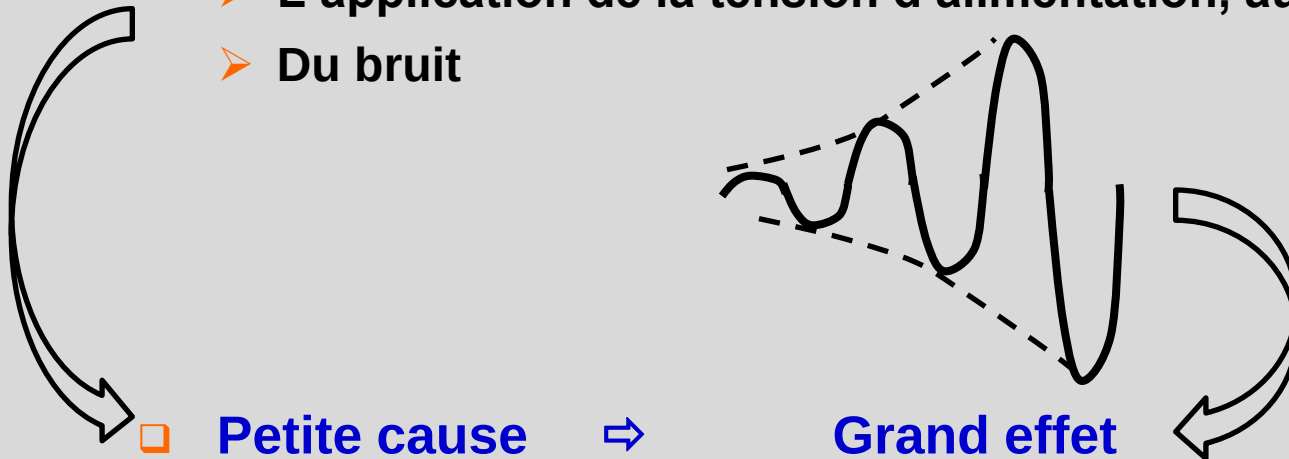
dépend du Système
(a, b) : cf. éq. caractéristique

$rf(t)$ ressemble à $x(t)$

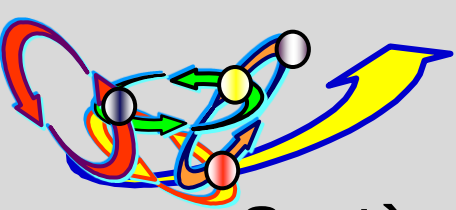
$$rl(t) = k_1 e^{f1(a,b)t} + k_2 e^{f2(a,b)t} \quad (\text{si racines éq. caract. distinctes})$$

L'une ou l'autre peuvent être transitoires ou permanentes, voire divergente pour la RL

- La réponse libre se *manifeste qq soit la source, si petite soit-elle*
- Un oscillateur, qui se comporte au démarrage comme un Système Linéaire instable (donc avec RL divergente), démarre sur
 - L'application de la tension d'alimentation, aussi progressive soit-elle
 - Du bruit



- Petite cause $\Rightarrow$ Grand effet (*dans un Système Linéaire !*)
- Puis la saturation de la sortie rend le Système non-linéaire en limitant l'amplitude des oscillations



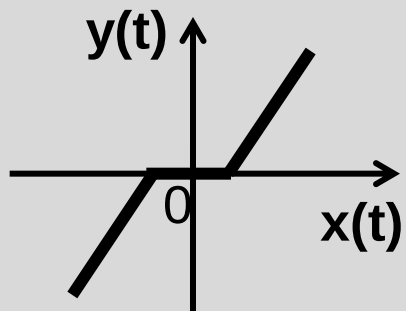
Systèmes Non-Linéaires

Qu'est-ce qu'un Système Non-Linéaire ?

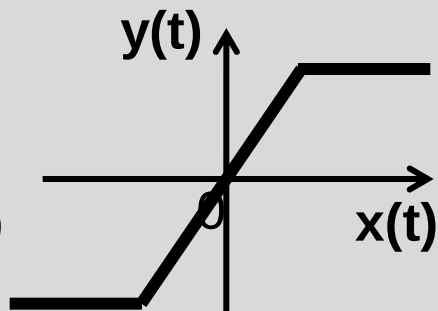
C'est un Système qui n'est pas linéaire !

Définition négative donc exhaustive !

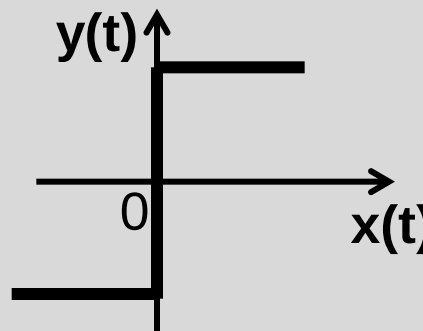
Caractéristiques non-linéaires simples



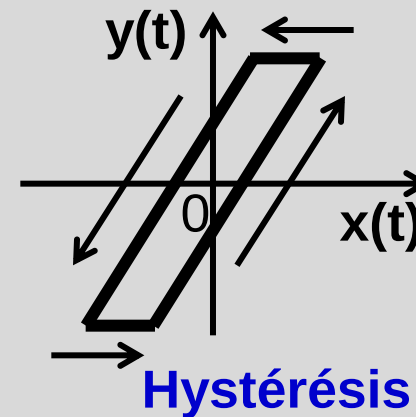
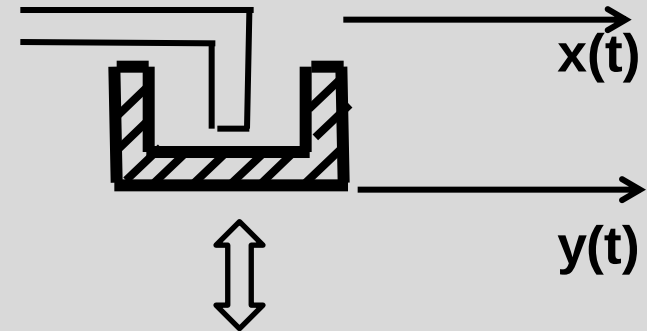
Seuil



Saturation
(+ combinaisons...)



Tout ou rien



Hystérésis

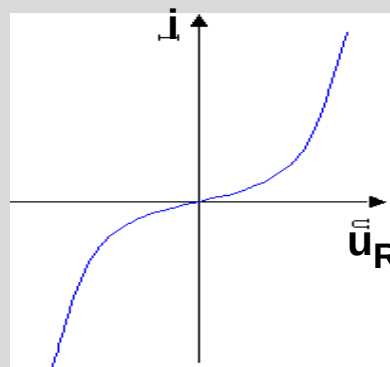
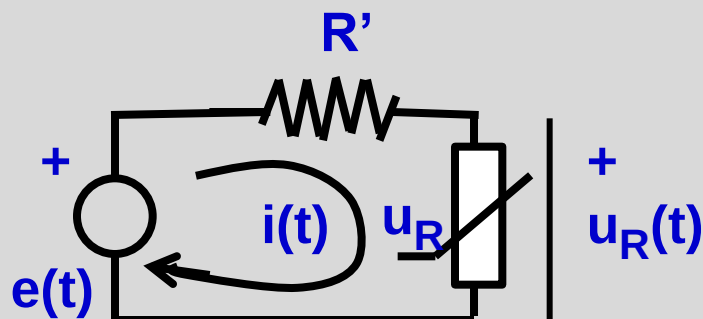
$$y \neq k x (+ b)$$

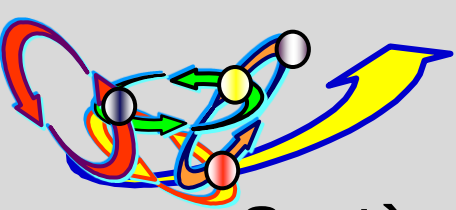
p. ex. :

$$y = x^2$$

$$y' = y + xy$$

Varistance





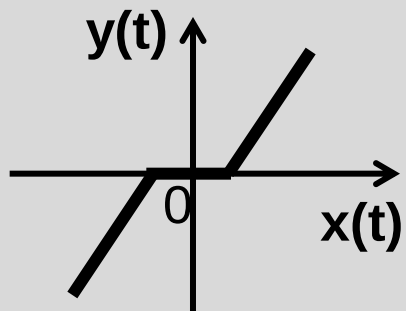
Systèmes Non-Linéaires

Qu'est-ce qu'un Système Non-Linéaire ?

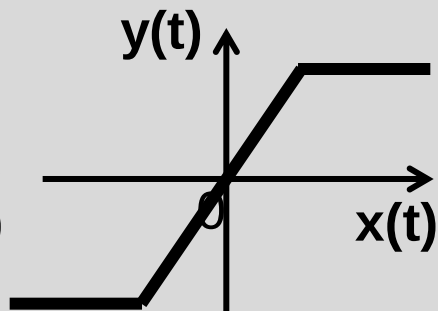
C'est un Système qui n'est pas linéaire !

Définition négative donc exhaustive !

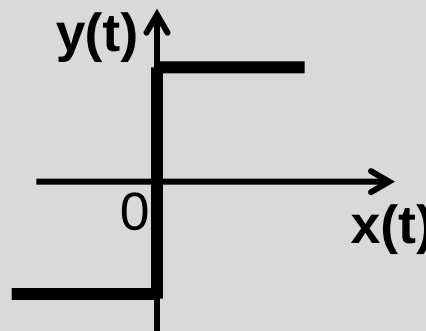
Caractéristiques non-linéaires simples



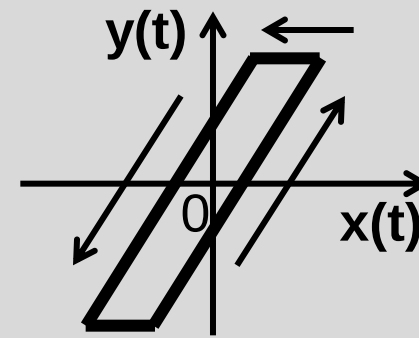
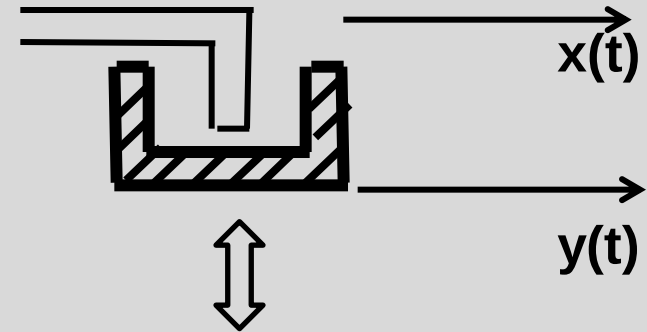
Seuil



Saturation
(+ combinaisons...)



Tout ou rien



Hystérésis

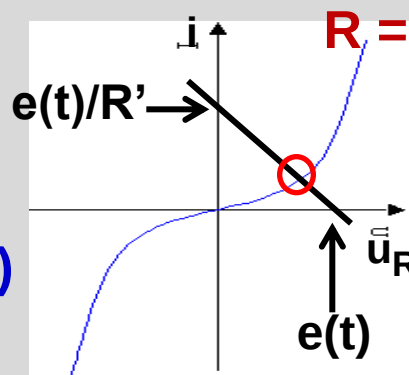
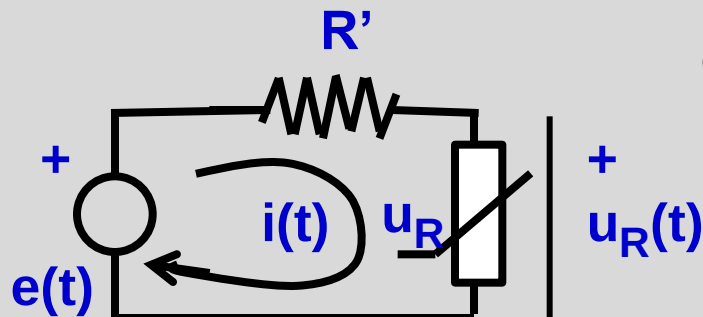
$$y \neq k x (+ b)$$

p. ex. :

$$y = x^2$$

$$y' = y + xy$$

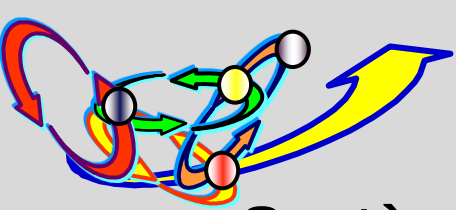
Varistance



$$R = R(u_R) = u_R(t) / i(t)$$

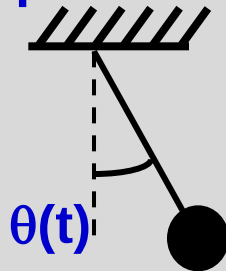
$$- e(t) + R1 i(t) + u_R(t) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i(t) = \frac{e(t) - u_R(t)}{R1} \\ i(t) = f[u_R(t)] \end{array} \right.$$



Systèmes Non-Linéaires - suite

□ Pendule pesant amorti



$$\theta''(t) + \rho \theta'(t) + \omega^2 \sin \theta(t) = 0$$

Si petites oscillations :

$\sin \theta(t) \sim \theta(t) \Rightarrow$ équa. diff.
linéaire (isochronisme)

□ Modèle de croissance de Solow Formulation dite néoclassique (1956) :

$\Rightarrow$ croissance équilibrée : production,
consommation, capital, population
croissent au même taux

$k(t)$ capital par tête à l'instant t

$F(k(t))$ production par tête,

p. ex. $F(k(t)) = [k(t)]^\alpha$

s taux d'épargne supposé constant
(ou part de la production allant à l'invest^t

n taux de croissance de la population

δ taux de dépréciation du capital

$$k'(t) = s F[k(t)] - (\delta + n) k(t)$$

□ Modèle à 2 populations de Lokta-Volterra : x population des proies prédateurs – proies (ou exploiters – exploités)

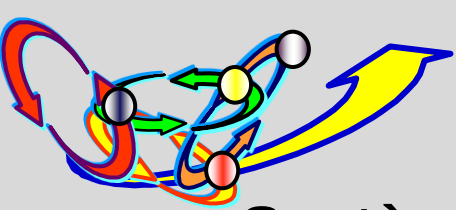
$N-L$: nb de rencontres proportionnel au
produit des populations

y population des prédateurs

$$x' = + a x - b xy$$

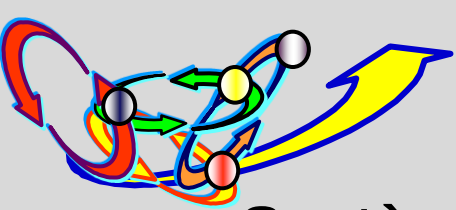
$$y' = - c y + d xy$$

2 Systèmes liés non-linéairement



Systèmes Non-Linéaires – suite et fin (provisoire)

- ❑ SN-L à dynamique plus riche que les SL – possibilités de :
 - Existence de **plusieurs états d'équilibre**
 - **Cycles limites** (attracteurs), oscillations d'amplitude indépendante des conditions initiales – ou « trajectoires » périodiques vers lesquelles l'évolution du Système converge spontanément depuis un domaine (éventuellement vaste) de C.I.
 - **Bifurcations**, changements qualitatifs de comportement – changements dans l'évolution : nombre de points d'équilibre, passage de stable à instable ou l'inverse, ou apparition de nouvelles solutions, lorsqu'un ou plusieurs paramètres varient



Systèmes Non-Linéaires – suite et fin (provisoire)

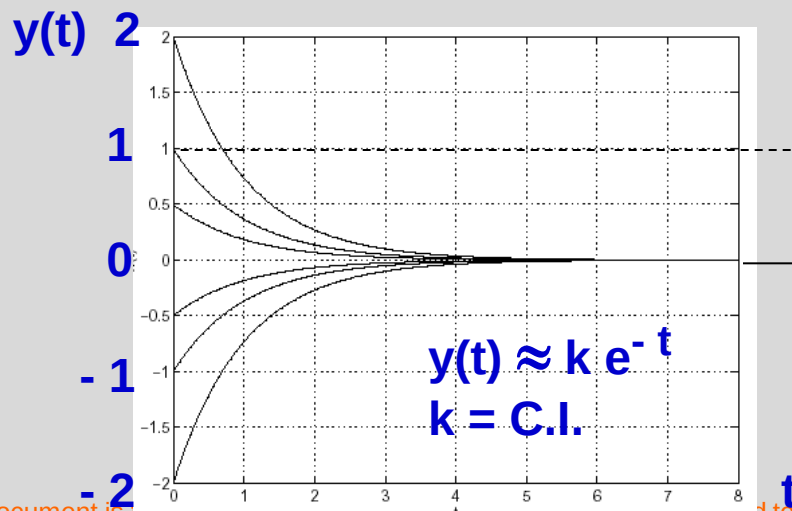
[*] notamment si nb de degrés de liberté (dimension du vecteur d'état, ou ordre du Système) ≥ 3

- SN-L à dynamique plus riche [*] que les SL – possibilités de :
 - Existence de **plusieurs états d'équilibre**
 - **Cycles limites** (attracteurs), oscillations d'amplitude indépendante des conditions initiales – ou « trajectoires » périodiques vers lesquelles l'évolution du Système converge spontanément depuis un domaine (éventuellement vaste) de C.I.
 - **Bifurcations**, changements qualitatifs de comportement – changements dans l'évolution : nombre de points d'équilibre, passage de stable à instable ou l'inverse, ou apparition de nouvelles solutions, lorsqu'un ou plusieurs paramètres varient

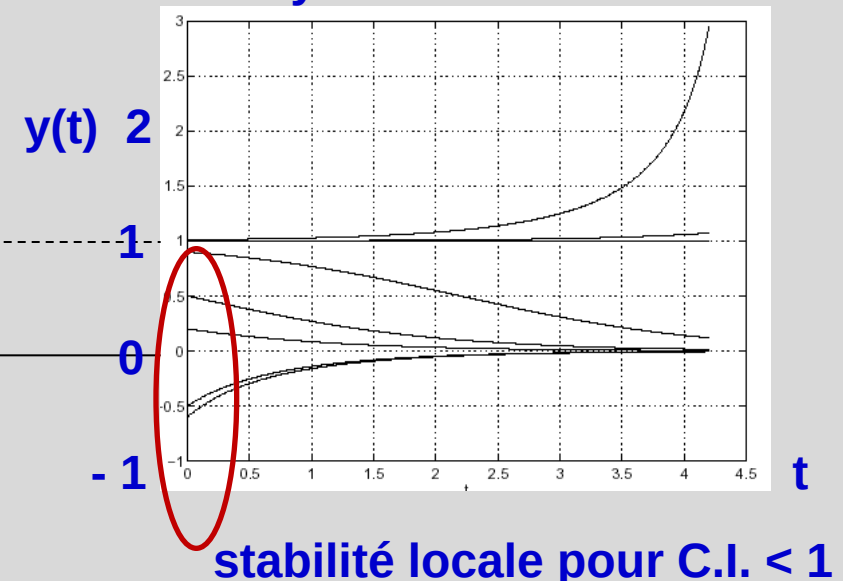
□ Ex. de bifurcation :

$$y'(t) = -y(t) + y^2(t)$$

Système linéarisé
(petits déplacements)



Système non-linéaire





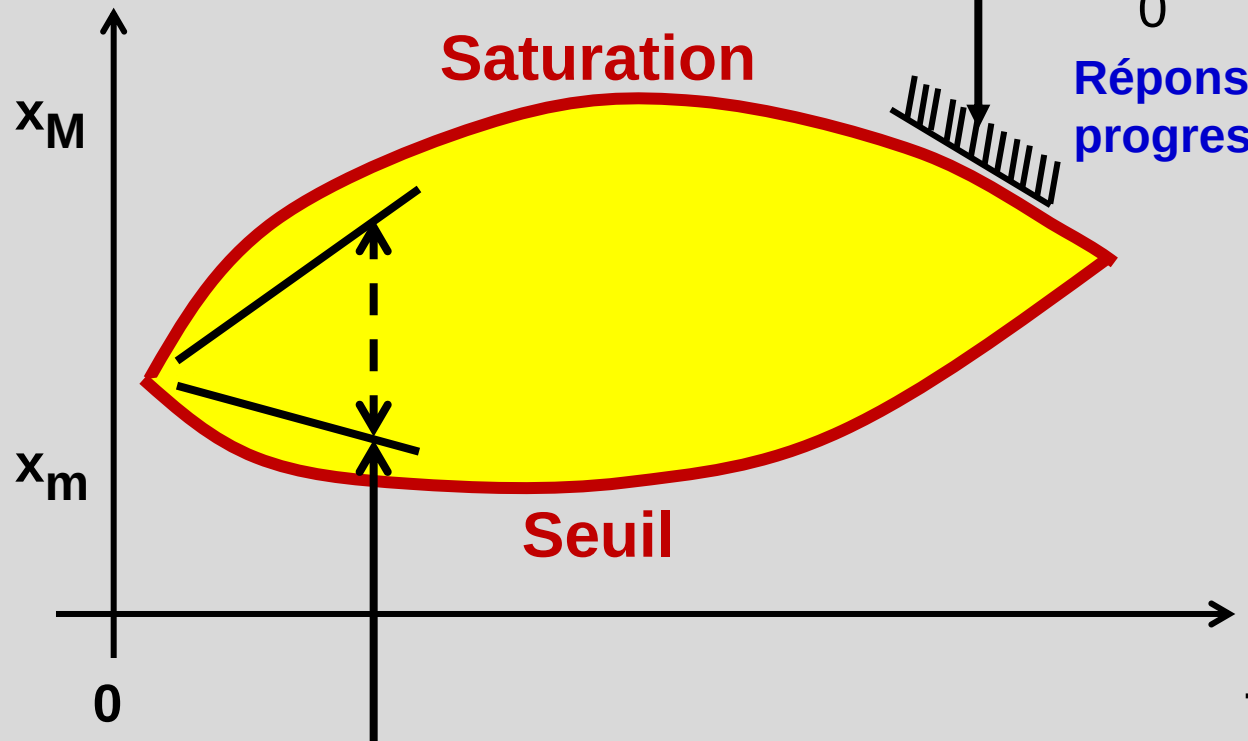
Citron de WEGEL

Amplitude de l'entrée
(ou excitation,
ou stimulus)

$x(t)$

En dB

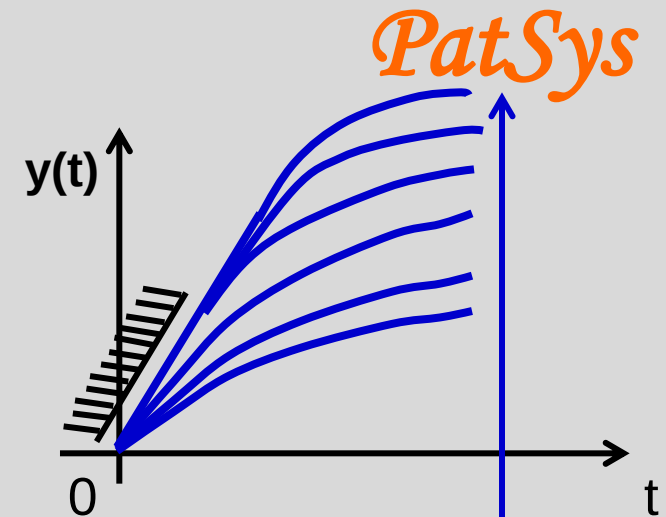
$x_M - x_m$ (dB)
définit la dynamique
de l'entrée



Lubrification dynamique
(*dither effect*)
Élimine l'effet de
certains frottements statiques

Limitation de la vitesse de
balayage (*slew rate*) des
amplificateurs
Passage à la Mécanique
des milieux continus (non-
linéaire)

....

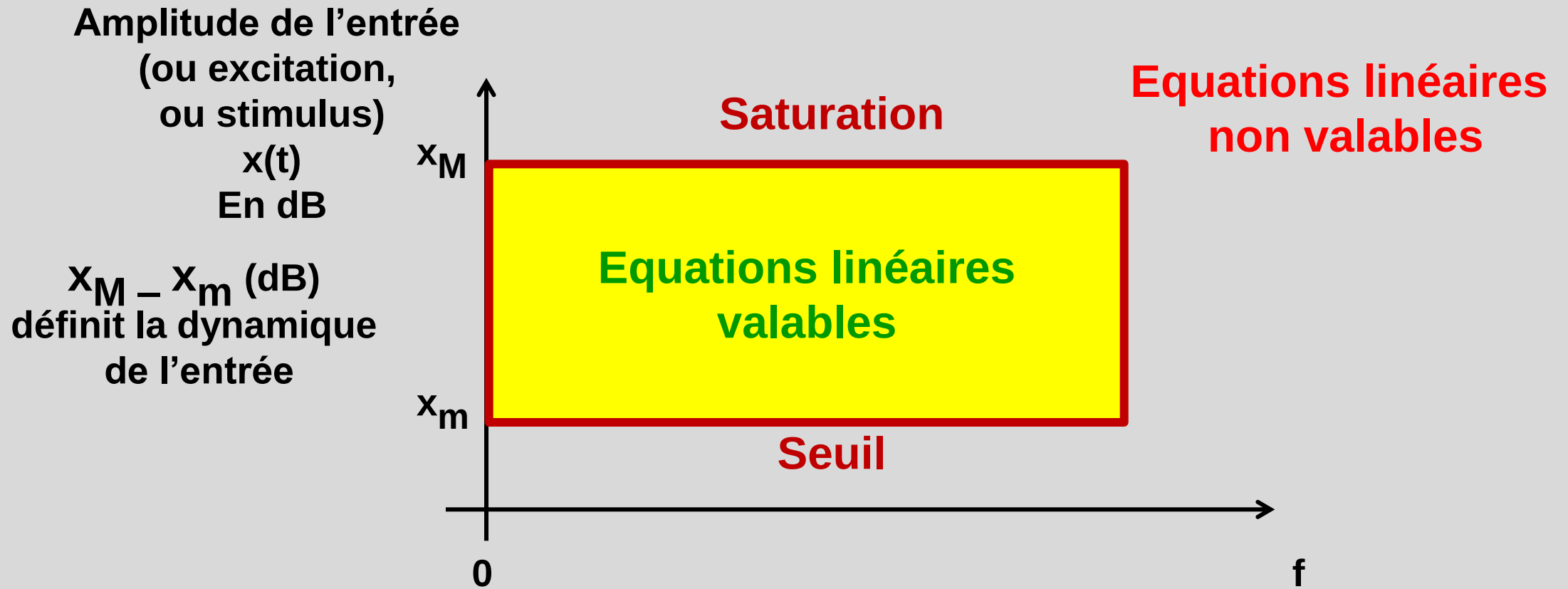


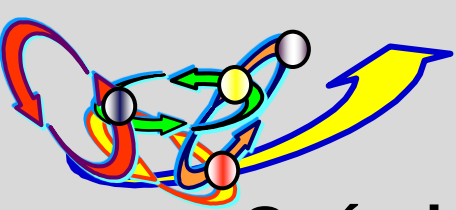
Réponses à des excitations
progressivement croissantes





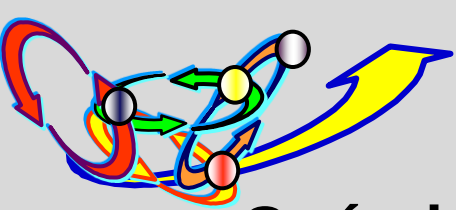
Citron de WEGEL – Rectangle de WEGEL





Opérabilité des Systèmes Linéaires





Opérabilité des Systèmes Linéaires

□ Bénéficient, de tout l'arsenal de :

□ L'Analyse

- Calcul différentiel et intégral
- Fonctions de variable complexe
- Transformations (LAPLACE, FOURIER)
- Equations d'état

□ L'Algèbre

- Calcul opérationnel
- Notation complexe
- Algèbre matricielle

□ La Géométrie

- Représentations graphiques

□ Plus les méthodes statistiques et les méthodes d'optimisation

Pour l'analyse des Systèmes Linéaires

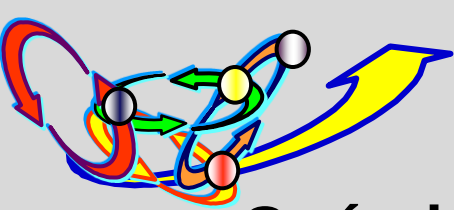
càd :

la détermination de leur comportement

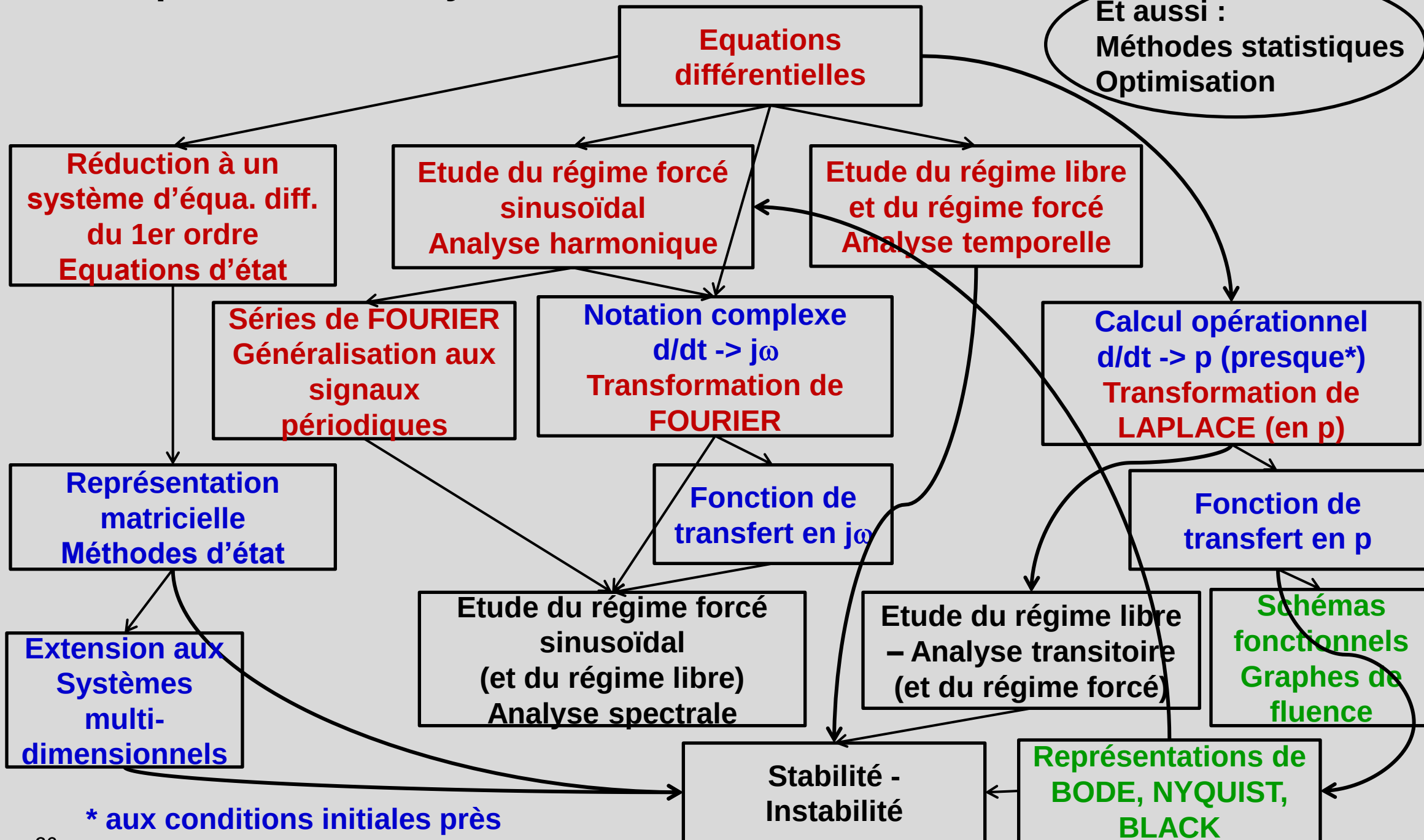
càd encore :

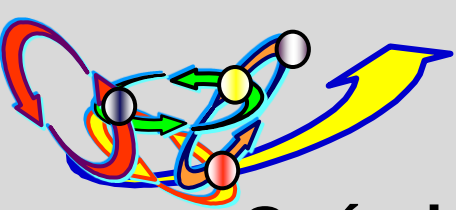
- la détermination de leurs réponses
à une excitation quelconque
(analyse temporelle,
analyse harmonique - ou fréquentielle)

- l'étude de leur stabilité,



Opérabilité des Systèmes Linéaires - suite





Opérabilité des Systèmes Linéaires – suite et fin

Et aussi :
Méthodes statistiques
Optimisation

Equations aux différences
(relations entre suites de
nombres)

Réduction à un
système d'équa. aux
diff. du 1er ordre
Equations d'état

Etude du régime libre
et du régime forcé
Analyse temporelle

Transformation de
FOURIER (en $j\omega$)
des suites de
nombres

$$z^{-1} = e^{-j\omega t}$$

Transformation en z
des suites de nombres
et calcul opérationnel
en z

Transformation de
LAPLACE (en p)
des suites de
nombres

$$e^{-Tp} = z^{-1}$$

Représentation
matricielle
Méthodes d'état

Théorie fréquentielle
de l'échantillonnage
(Shannon)

Fonction de
transfert en z

$$w = (z - 1)/(z + 1)$$

Transformation en w

Etude du régime libre
– Analyse transitoire
(et du régime forcé)

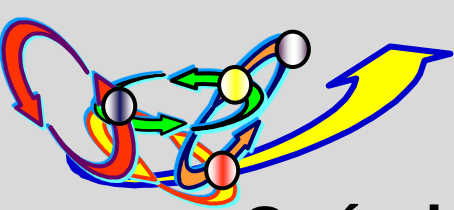
Schémas
fonctionnels
Graphes de
fluence

Extension aux
Systèmes
multi-
dimensionnels

Analyse
harmonique

Stabilité -
Instabilité

Représentations de
BODE, BLACK



Opérabilité des Systèmes Non-Linéaires

❑ Pas de théorie des SN-L, mais des théories ou plutôt des pratiques

➤ Linéarisation par balayage (lubrification dynamique)

On rend le Système linéaire

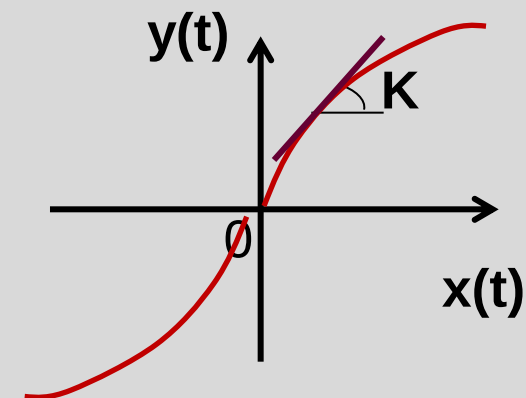
➤ Linéarisation autour d'un point de fonctionnement

On considère le Système linéaire localement

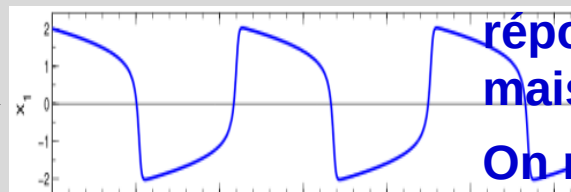
➤ Linéarisation harmonique

On fait comme si le Système était linéaire

▪ Méthode du « premier harmonique » (en fait, du « fondamental »)



fréquence pure f_0



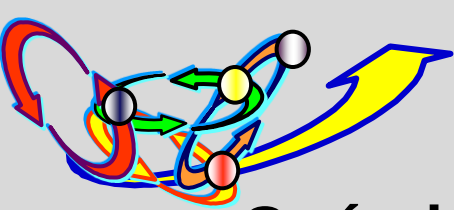
réponse périodique de même fréquence f_0
mais non sinusoïdale ($f_0, 2f_0, 3f_0, 4f_0, \dots$)

On ne retient que le fondamental

- Justifiée par le filtrage HF réalisé naturellement par les Systèmes
- Bénéficie de tout l'arsenal des méthodes harmoniques

➤ Plan de phase (méthode pas limitée aux SN-L) .../...

Frontières des SL : Freins ET Stimulateurs !

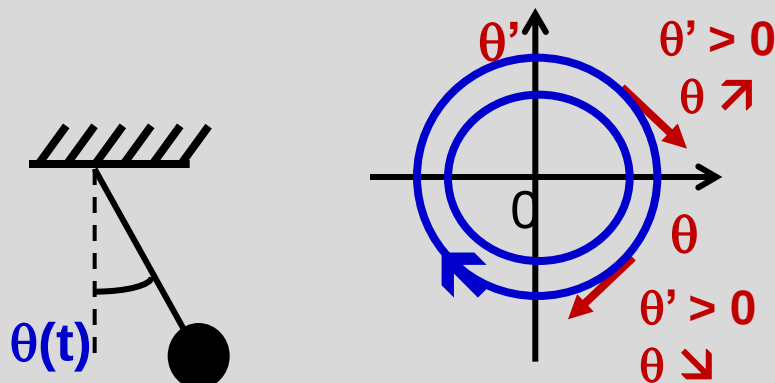


Opérabilité des Systèmes Non-Linéaires (suite)

- .../... Méthode du plan de phase = Représentation, dans le plan, de l'évolution de 2 variables (« variables d'état »), en fonction l'une de l'autre, p. ex. position et vitesse $\Rightarrow$ « trajectoires de phase »

Oscillateur harmonique libre non amorti (SL)

Trajectoires de phase = cercles



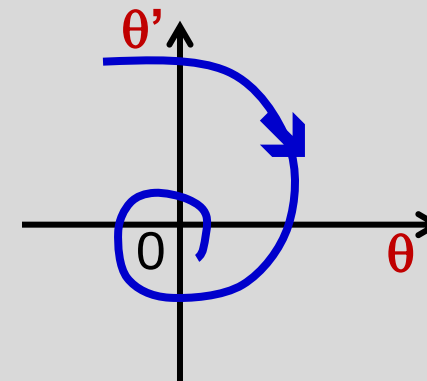
$\theta(t)$ = position
angulaire
 $\theta'(t)$ = vitesse
angulaire

linéaire si θ faible

rayon du cercle
fonction des conditions
Initiales (SL)

Oscillateur harmonique libre amorti (SL)

Trajectoires de phase = spirales



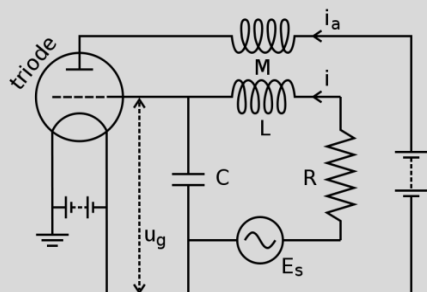
dimension de la spirale
fonction des conditions
initiales C.I. (SL)

un seul point d'équilibre (SL)

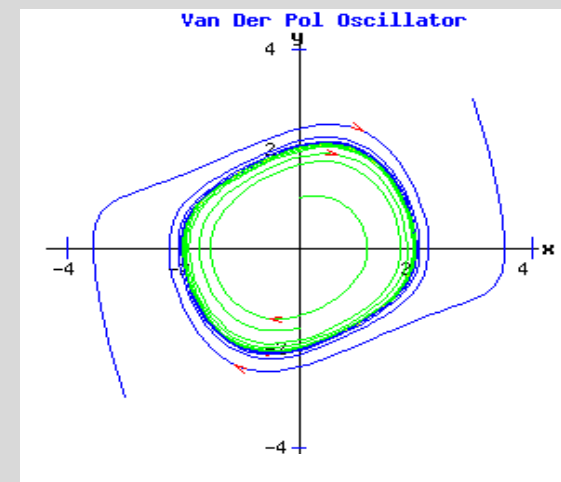
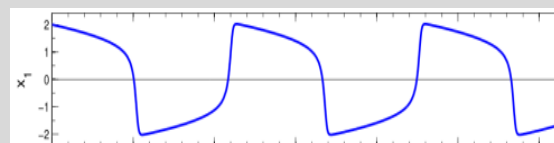
Opérabilité des Systèmes Non-Linéaires (suite et fin)

➤ .../... Méthode du plan de phase (suite)

Oscillateur de Van der Pol (SN-L)



attracteur en forme de **cycle limite**
(cycle limite = oscillations « de relaxation »)
le même qq soit la C.I. (≠ SL)



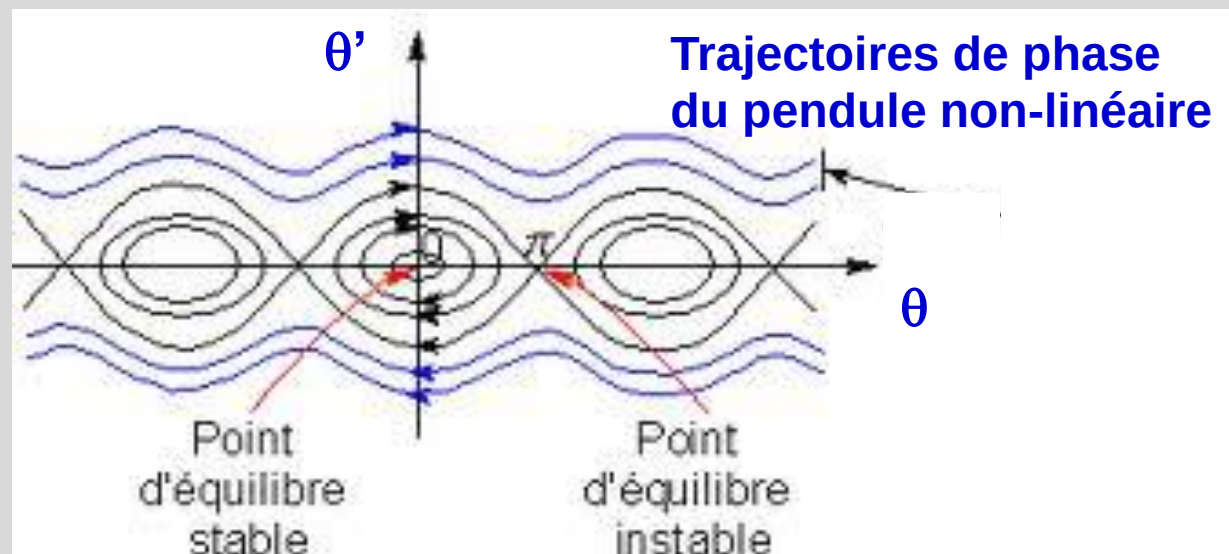
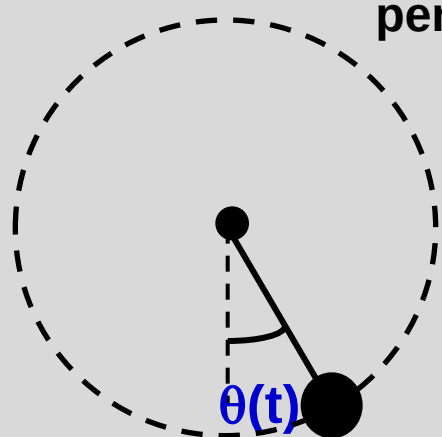
Plusieurs points d'équilibre possibles pour un SN-L (≠ SL)

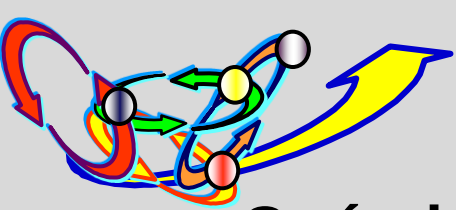
pendule pesant à tige rigide

2 points d'équilibre :

$\theta = 0$ (stable)

$\theta = 180^\circ$ (instable)





Opérabilité des Systèmes Non-Linéaires (suite et fin)

➤ .../... Plan de phase (méthode pas limitée aux SN-L)

Etat d'ordre 2 :
($v'=y''$, $v=y'$, $u=y$)

2 variables d'état
 u et $v \Leftrightarrow 2$ équa.
diff. du 1^{er} ordre

Si ordre 3 (ou +) :
espace (ou hyper-
espace) d'état ou
de phase
 $\Rightarrow$ projection sur
des plans

- Oscillateur harmonique libre non amorti (SL)

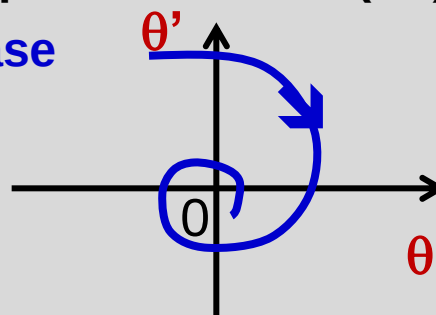
Trajectoires de phase

= cercles

- Oscillateur harmonique libre amorti (SL)

Trajectoires de phase

= spirales



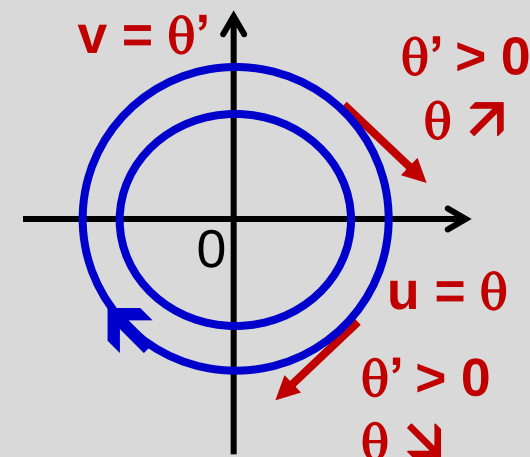
- Oscillateur de Van der Pol (SN-L à caract. quadratique)

$$\theta''(t) + \theta(t) = 0$$

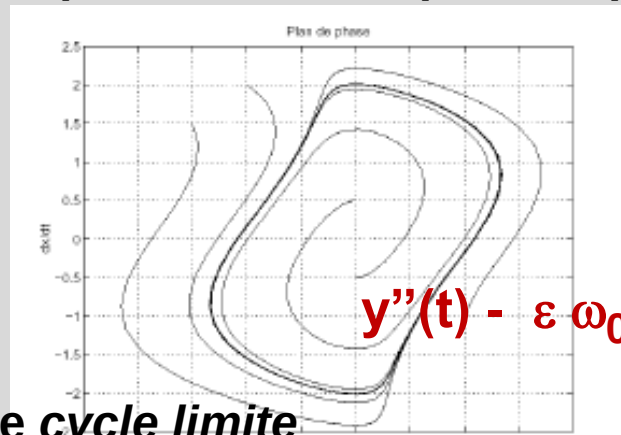
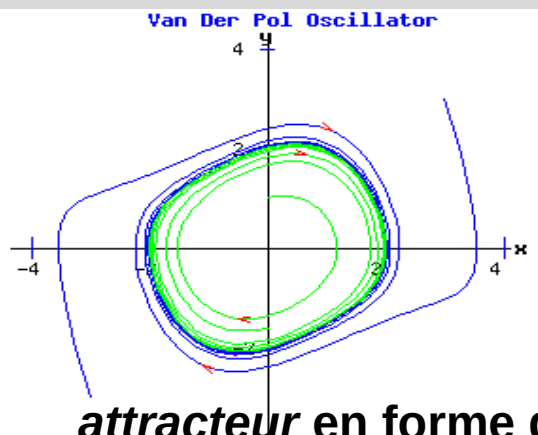
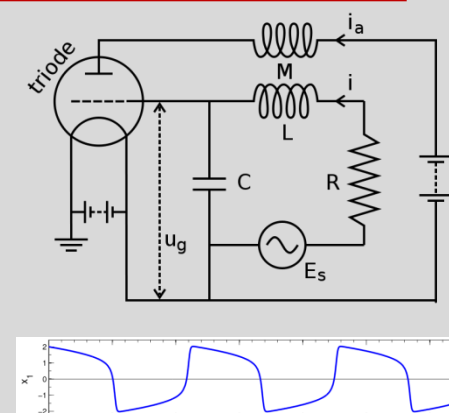
$$u = \theta$$

$$v = \theta'$$

$$\Rightarrow v' + u = 0$$

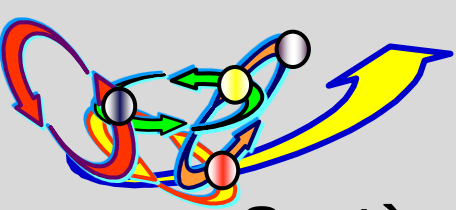


rayon du cercle fonction
des conditions initiales



$$y''(t) - \varepsilon \omega_0 [1 - y^2(t)] y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

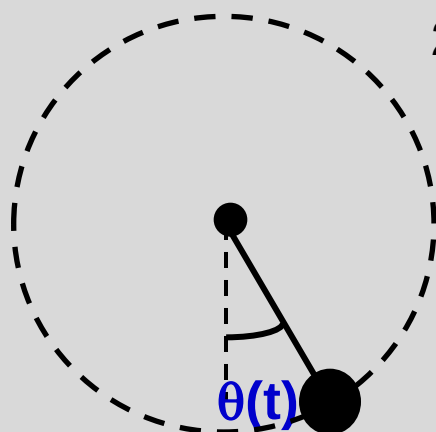
attracteur en forme de cycle limite
(cycle limite = oscillations « de relaxation ») qq soit la C.I.



Systèmes Non-Linéaires : Caractéristiques

Plusieurs points d'équilibre

pendule pesant à tige rigide

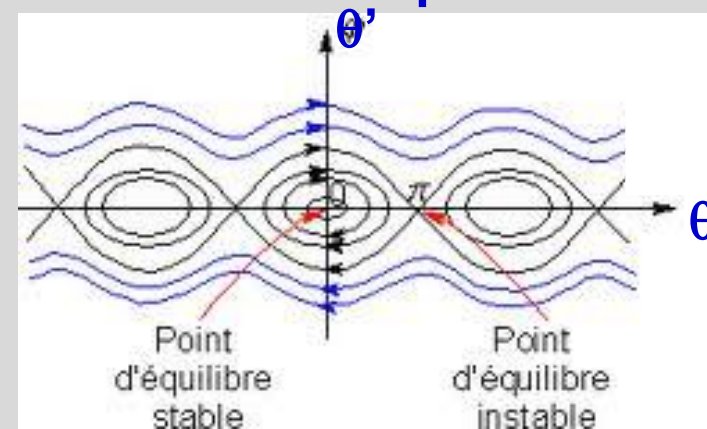


2 points d'équilibre :

$\theta = 0$ (stable)

$\theta = 180^\circ$ (instable)

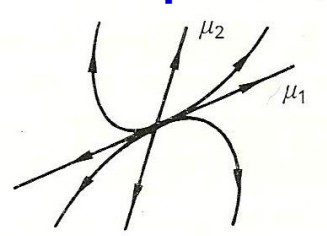
Plan de phase



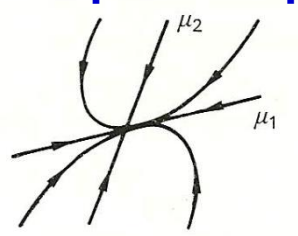
Points singuliers (notion valable aussi pour les SL)

= points où toutes les dérivées y' , y'' , ... sont nulles

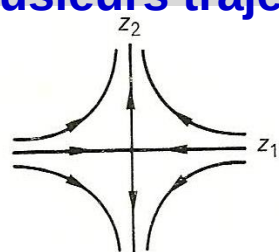
Points par lesquels passent plusieurs trajectoires de phase



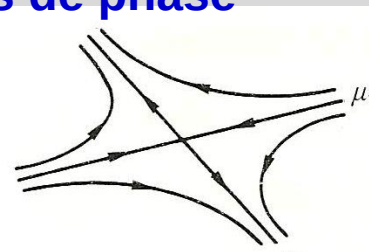
Nœud stable



Nœud instable



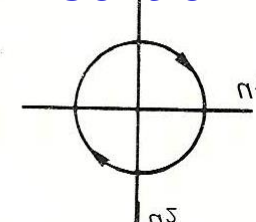
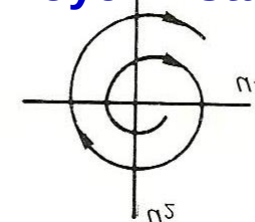
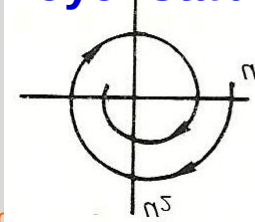
Col

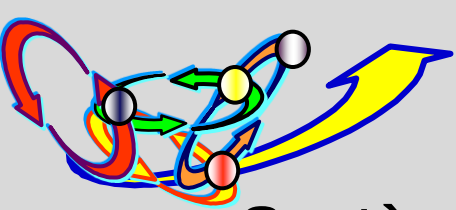


Foyer stable

Foyer instable

Centre





Systèmes Non-Linéaires : Caractéristiques - suite

□ Attracteur (ou ensemble limite)

Ensemble de l'espace des phases vers lequel toutes les trajectoires environnantes convergent – ou vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations

➤ Point fixe

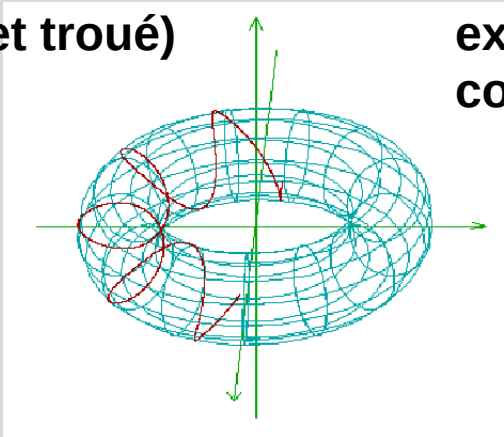
ex. : point d'arrêt du pendule pesant amorti

➤ Cycle limite

ex. : oscillateur de Van der Pol

➤ Tore (beignet troué)

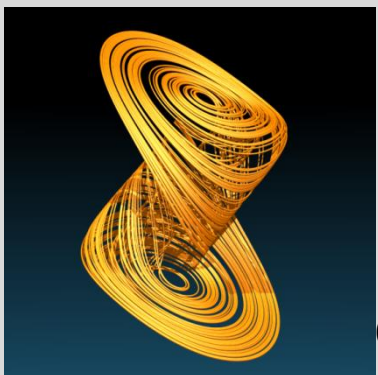
ex. : mouvement de l'œil (saccades naturelles) combinant des oscillations indépendantes



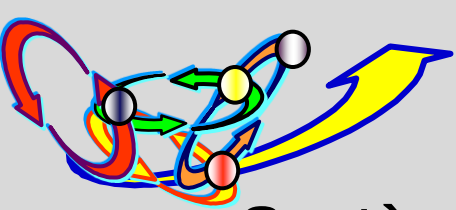
➤ Attracteur étrange (chaos)

ex. : couplage atmosphère-océan (Lorenz)

Forme d'attracteur lié à une dynamique apparemment désordonnée et pourtant déterministe (suppose que le Système ait au moins deux fréquences d'oscillations indépendantes) – caractéristique des Systèmes chaotiques
dénomination de David Ruelle et Floris Takens (1971)



□ Bassin d'attraction : ensemble des Conditions Initiales pour lesquelles les trajectoires associées convergent toujours vers le même attracteur



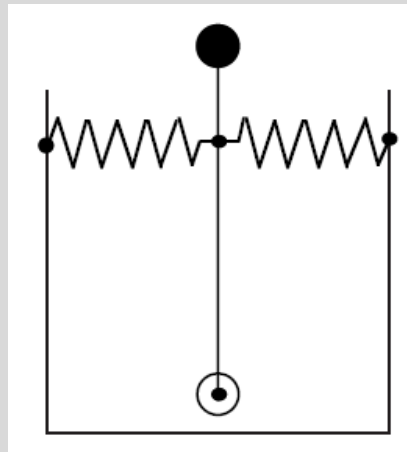
Systèmes Non-Linéaires : Caractéristiques – suite et fin

- ❑ **Bifurcations : changements qualitatifs de comportement – changements dans l'évolution : nombre de points d'équilibre, passage de stable à instable ou l'inverse, ou apparition de nouvelles solutions, lorsqu'un ou plusieurs paramètres varient**

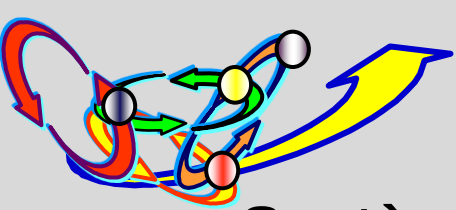
- **Equation de Van der Pol**
⇒ pour une certaine valeur d'un paramètre, passage de stable à instable

- **Pendule pesant inversé dans le champ de pesanteur**

- ⇒ peut être le siège de bifurcations



- **Bifurcation topologique ou catastrophe : perte ou changement de stabilité structurelle qui affecte non pas une solution particulière mais l'ensemble de toutes les trajectoires du système**



Systèmes Non-Linéaires : Caractéristiques – suite et fin

- **Bifurcations : changements qualitatifs de comportement – changements dans l'évolution : nombre de points d'équilibre, passage de stable à instable ou l'inverse, ou apparition de nouvelles solutions, lorsqu'un ou plusieurs paramètres varient**

- **Equation de Van der Pol**

⇒ pour une certaine valeur d'un paramètre, passage d'un foyer stable à un foyer instable

$$y''(t) - \varepsilon \omega_0 [1 - y^2(t)] y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

Si $\omega_0 = 1$, et posant y et $x = y'(t)$

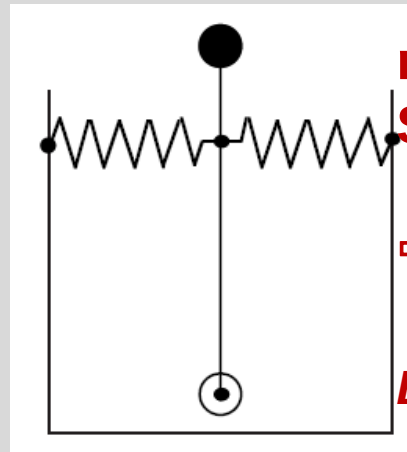
comme variables d'état :

$$x'(t) - \varepsilon [1 - y^2(t)] x(t) + y(t), y'(t) = x(t)$$

en $\varepsilon = 0$ bifurcation « de Hopf supercritique » [*]

- **Pendule pesant inversé dans le champ de pesanteur**

⇒ peut être le siège de bifurcations



$$ml^2 \theta''(t) = mgl \sin \theta(t) - k \theta(t) - \lambda \theta'(t)$$

Si $\lambda = 0$ et $\sin \theta = \theta - \theta^3/3!$:

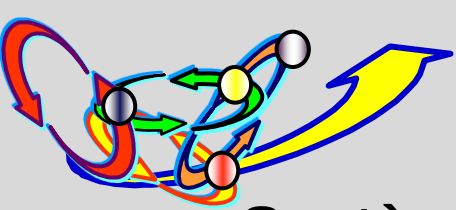
⇒ Equation de Duffing

$$y''(t) + \alpha y(t) + x^3(t) = 0$$

Bifurcation si α passe de 0 à 0+

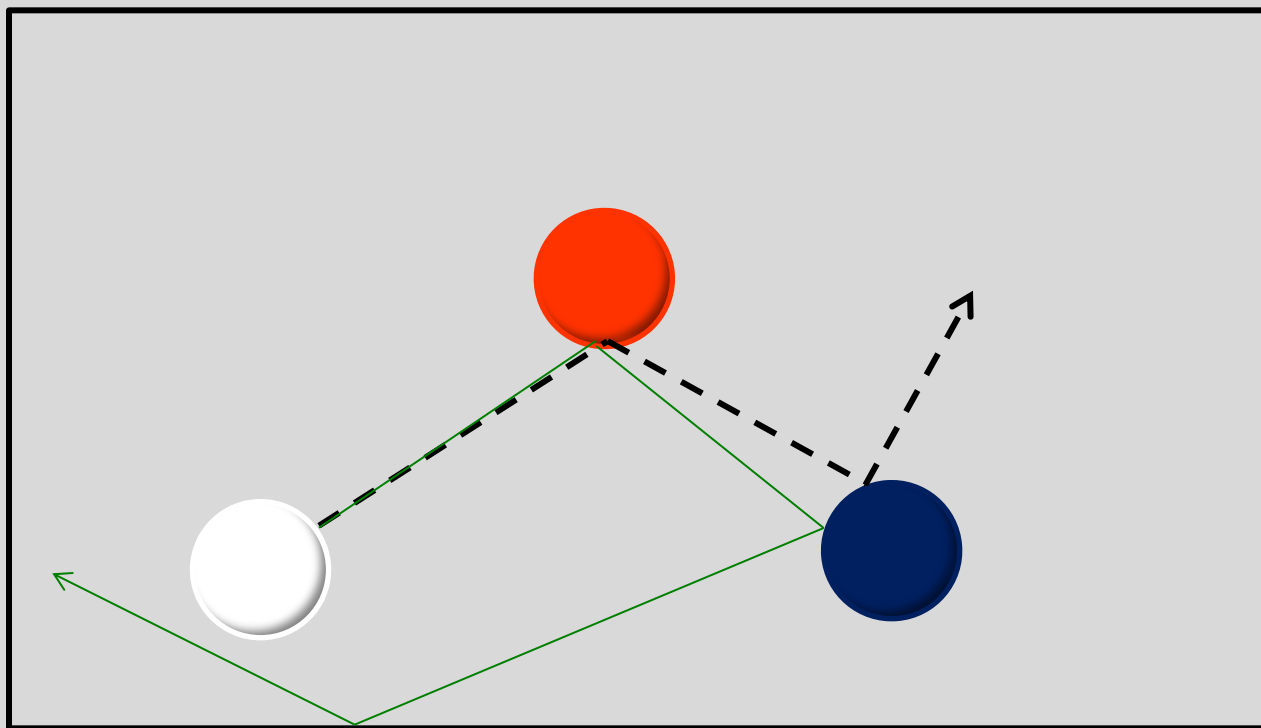
- **Bifurcation topologique ou catastrophe : perte ou changement de stabilité structurelle qui affecte non pas une solution particulière mais l'ensemble de toutes les trajectoires du système**

[*] autres types de bifurcations : bifurcation nœud-col, bifurcation fourche

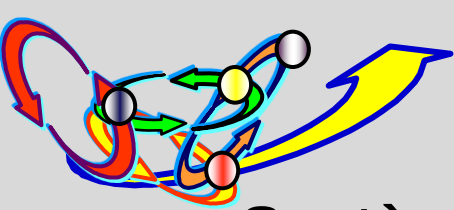


Systèmes chaotiques

- ❑ **Chaos** : Comportement imprévisible et apparemment aléatoire, très dépendant des Conditions Initiales, d'un système dynamique défini par des équations déterministes
- ❑ **Système chaotique** : système déterministe mais dont la sortie semble aléatoire et qui est très sensible aux conditions initiales



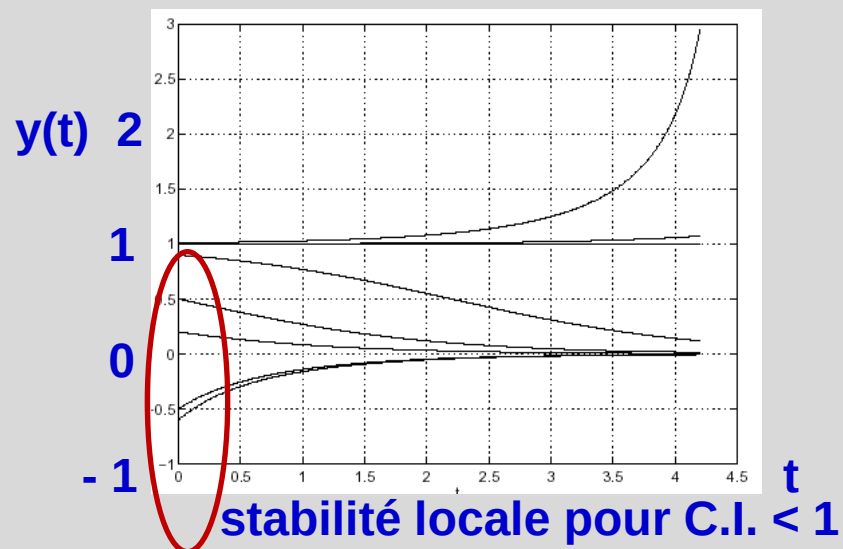
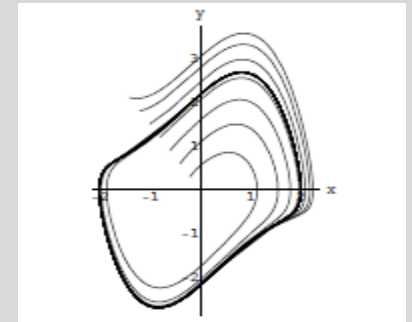
Dépendance **sensitive** aux conditions initiales (David RUELLE, *Hasard et Chaos*)
A la fois **déterminisme** et **imprédictibilité**



Systèmes chaotiques - suite

□ Résumé SN-L :

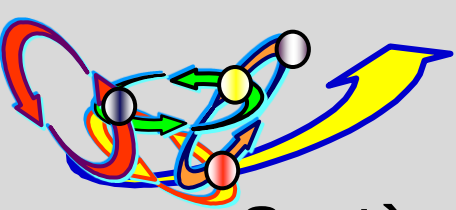
- SN-L moins dépendants des conditions initiales que les SL :
attracteurs (points, cycles limites...) **indépendants des C.I.**
- en effet, pour une région donnée (bassin d'attraction), le système évolue vers une **solution unique**
- une fois le système sur son attracteur, il y reste confiné
- il peut y avoir des instabilités locales autour de plusieurs points singuliers, mais la trajectoire reste bornée (confinée dans une courbe fermée) s'il n'y a pas de bifurcation
- s'il y a bifurcation, la sortie du Système est sensible aux **Conditions Initiales** :



$y'(t) = -y(t) + y^2(t)$: fonction logistique

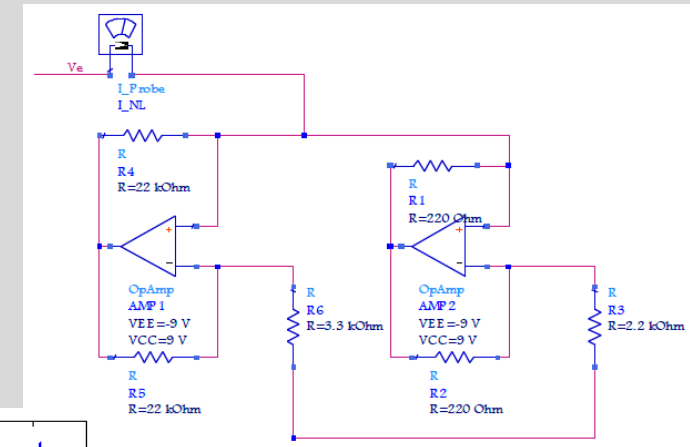
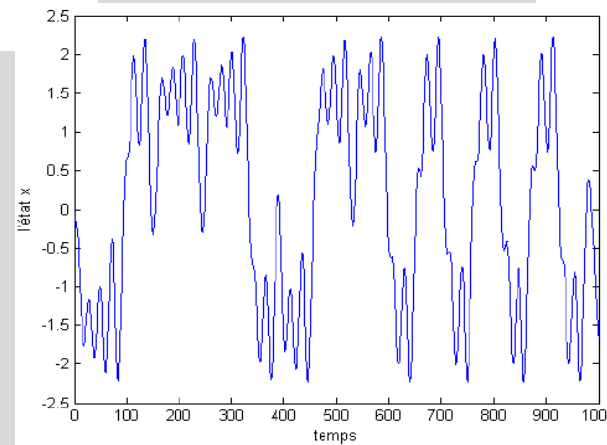
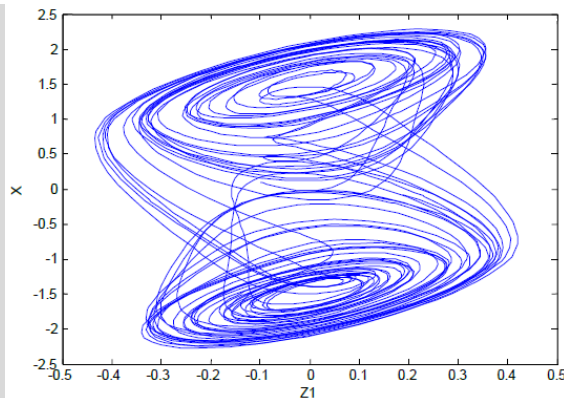
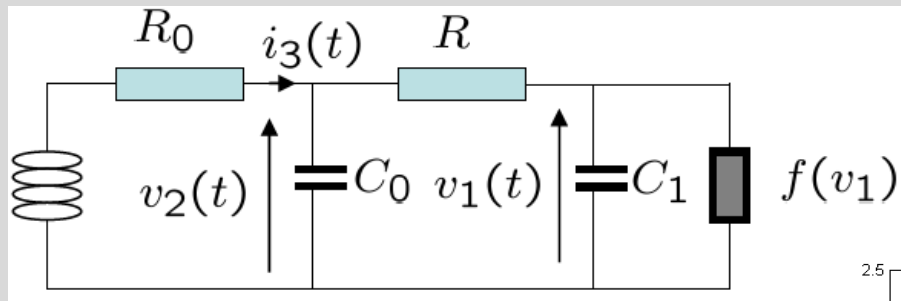
Du fait de l'**aspect aléatoire malgré la nature déterministe** du Système, il peut être difficile de prévoir son comportement ;
mais il peut ne pas être chaotique pour autant

Avant de devenir chaotique, un Système présente des changements brutaux et multiples de comportements (bifurcations) liés à la modification d'un paramètre



Systèmes chaotiques - suite

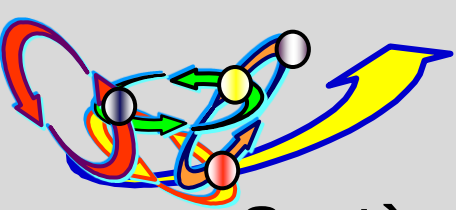
RLC avec résistance négative



Difficulté de prédiction de la trajectoire (l'évolution) à un instant t : imprévisibilité fondamentale des Systèmes chaotiques

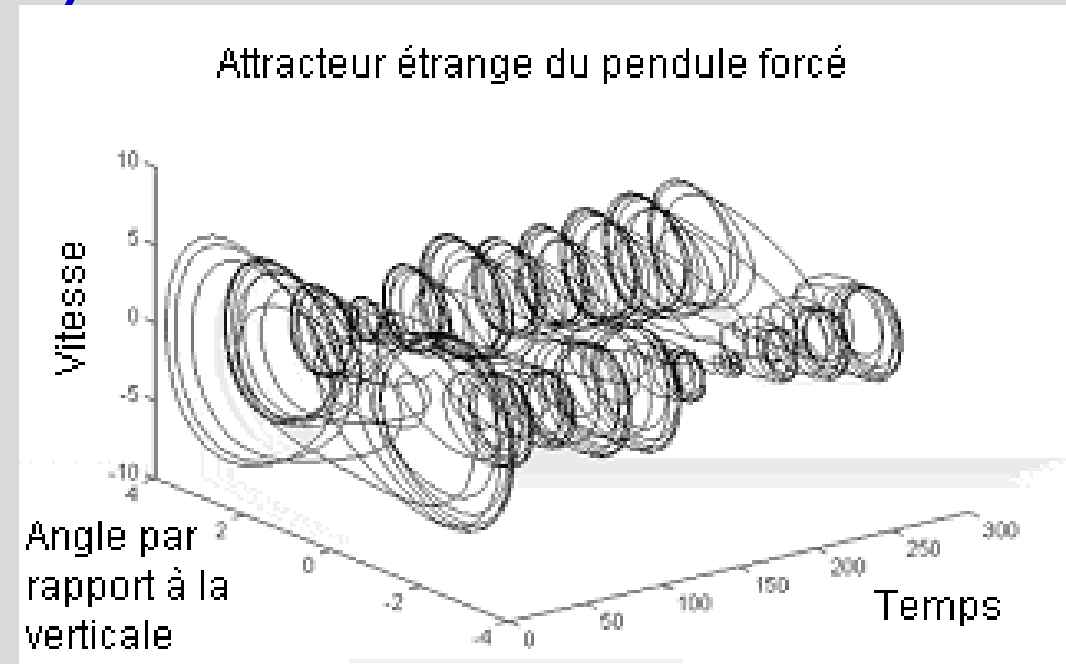
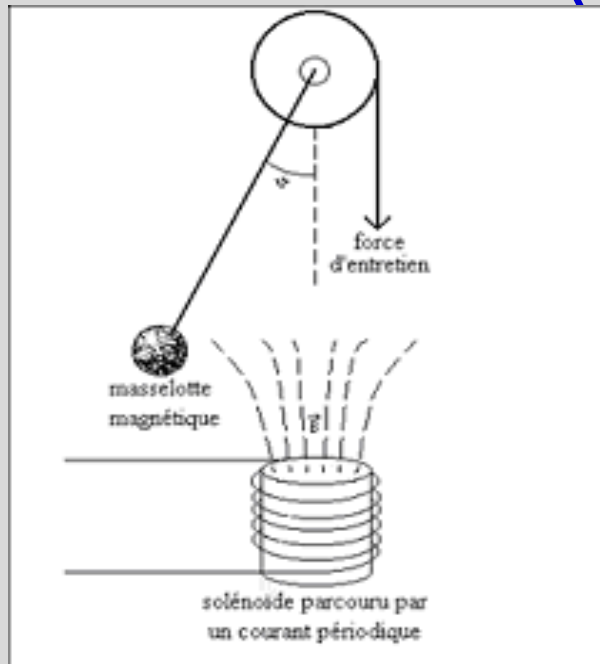
- Au lieu d'être dissipatif (effet Joule), le système est entretenu par un apport d'énergie via la résistance négative (circuit actif à base d'amplis opés)
- De par la non linéarité active, tout se passe comme si le système, revenant vers un état stable, recevait une quantité d'énergie avant d'être de nouveau dissipatif (**états successifs d'expansion puis de rétraction**)

- Lev Landau cherchait à expliquer ce type de comportement par une superposition de « modes » (oscillations périodiques), David Ruelle a introduit la notion de chaos (article « *On the nature of turbulence* », écrit avec Floris Takens)

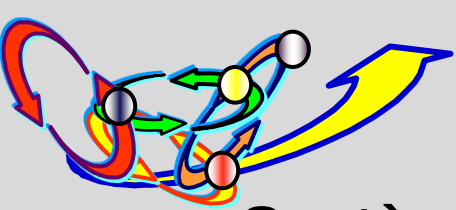


Systèmes chaotiques - suite

□ Pendule forcé et aimant (ou solénoïde)



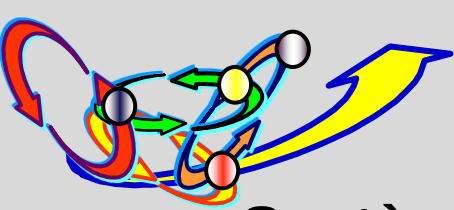
- L'énergie d'origine magnétique apportée est non-linéaire (force d'attraction en $1/d^2$)
- D'une oscillation à une autre, le pendule n'effectue jamais deux fois le même trajet
- Si l'on modifie très légèrement une condition initiale (position ou vitesse angulaire initiale ou position de l'aimant), la nouvelle trajectoire diffère totalement de la précédente :
 - à un instant donné, les deux pendules ont des positions différentes
 - à deux instants différents pour lesquels les deux pendules ont la même position, il est impossible de prédire la position future dans la deuxième expérience en connaissant l'évolution de la première



Systèmes chaotiques - suite

- ❑ Même si deux conditions initiales sont voisines, la distance séparant les deux trajectoires dans l'espace des phases évolue très différemment d'une trajectoire à une autre et très « rapidement » les trajectoires se trouvent décorrélées
- ❑ Dans un système chaotique, la modification des paramètres de contrôle permet de modifier la trajectoire pour évoluer d'un attracteur à un autre attracteur

La trajectoire reste déterminée par le comportement non linéaire du système mais est commandée par la modification d'un (de) paramètre(s) de contrôle du système :
route vers le chaos



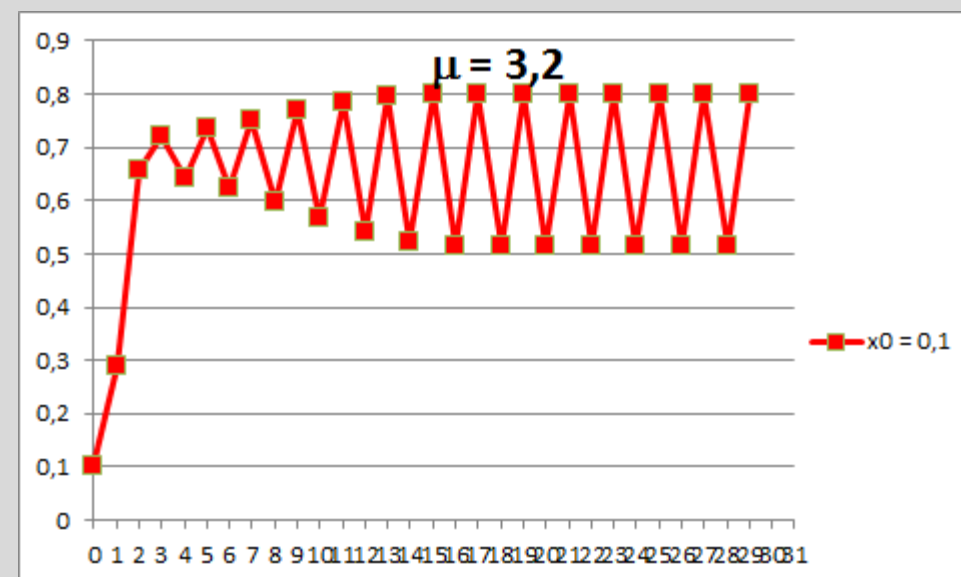
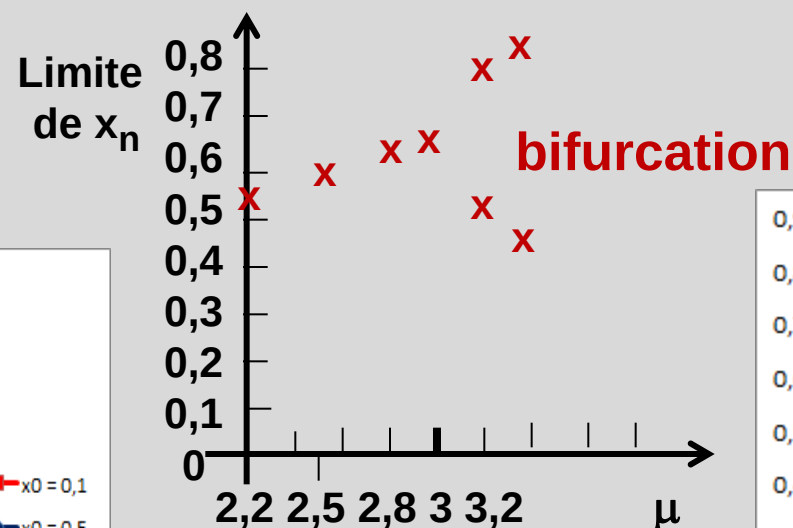
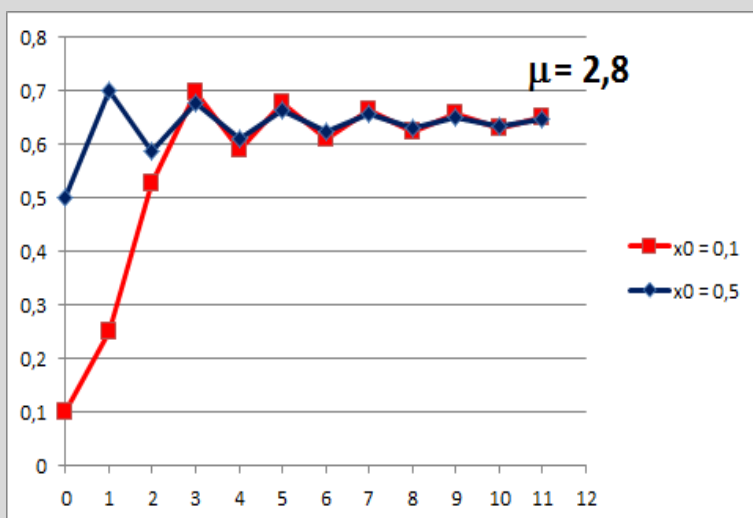
Systèmes chaotiques - suite

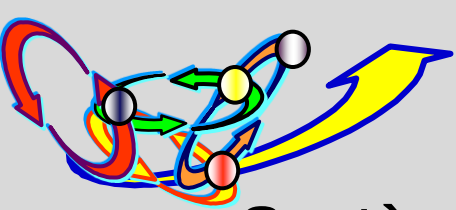
**Bifurcation triviale : soit $x^2 - a = 0$;
si $a > 0$, $x = \pm \sqrt{a}$; si $a < 0$, x est imaginaire
 $\Rightarrow a = 0$ est une bifurcation**

[*] exemple type de complexité de comportement lié à une non-linéarité
(λογιστης = celui qui calcule)

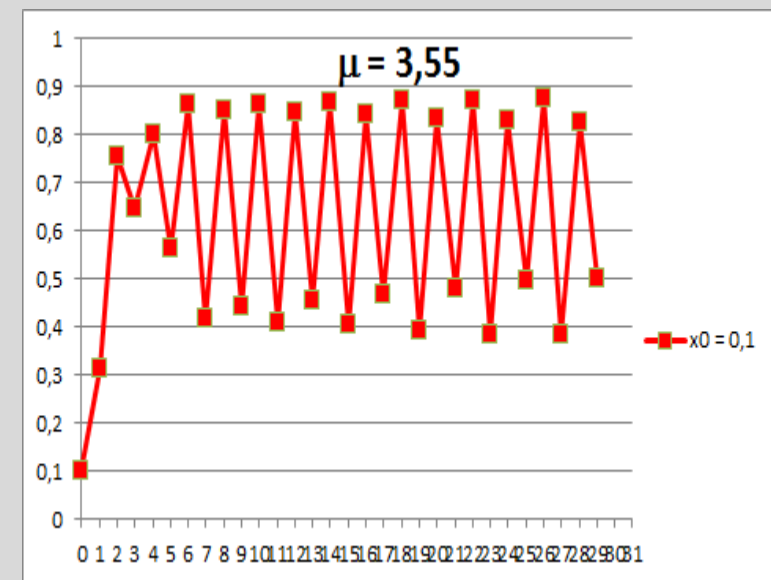
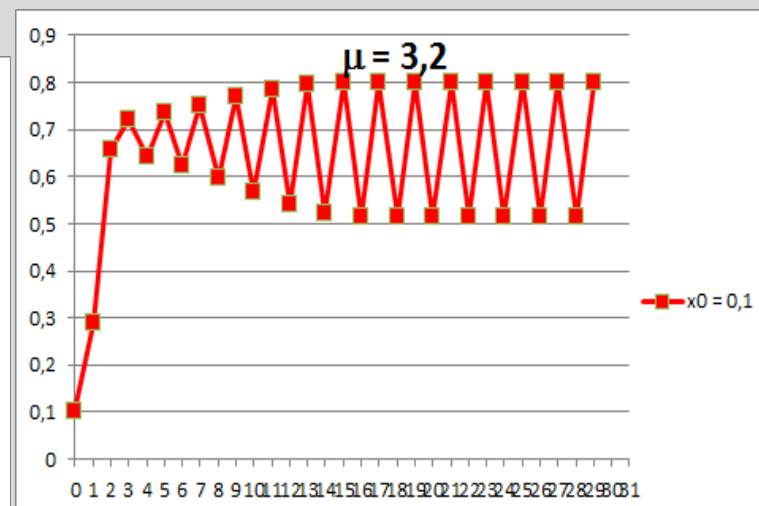
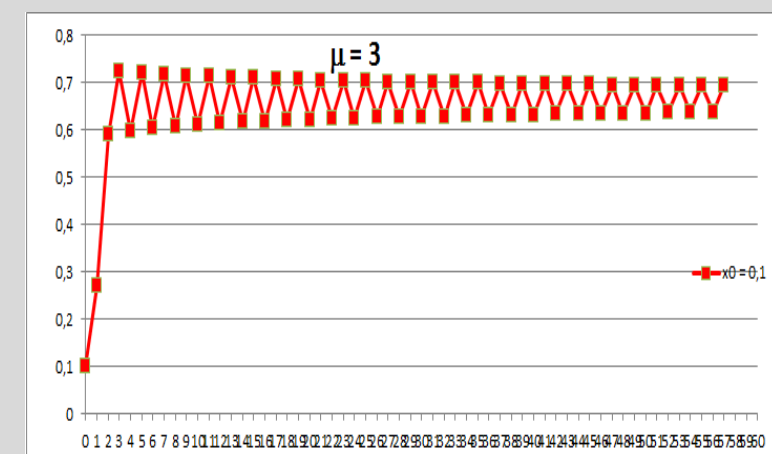
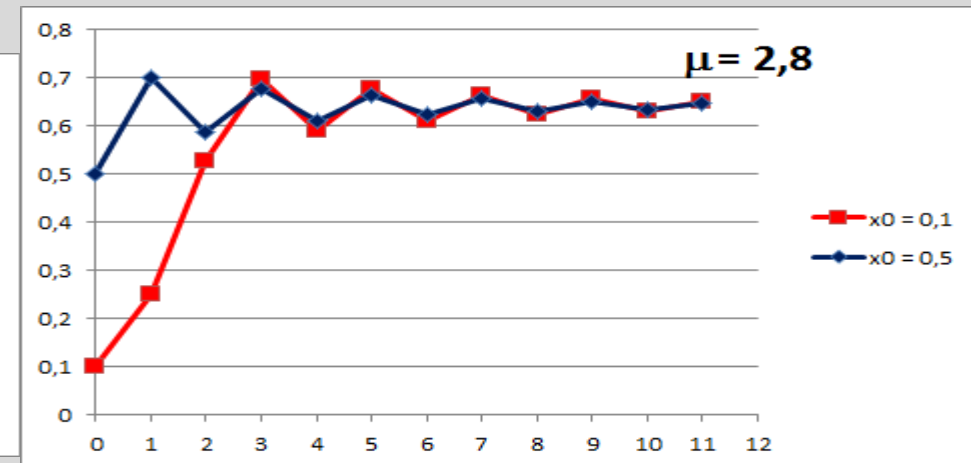
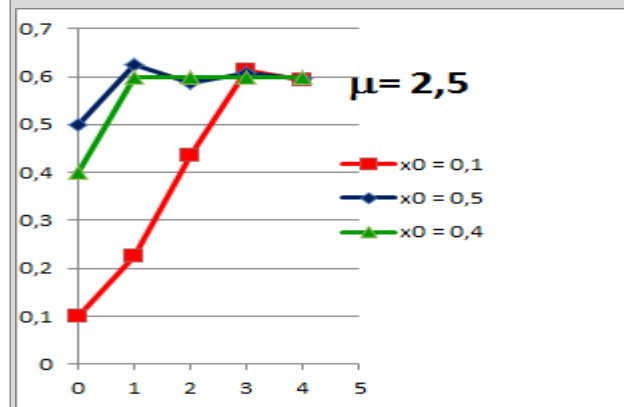
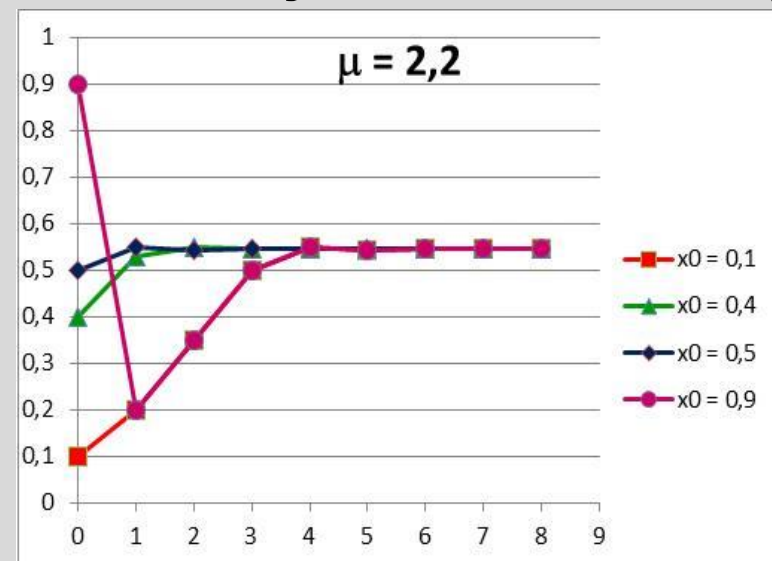
Retour sur les bifurcations

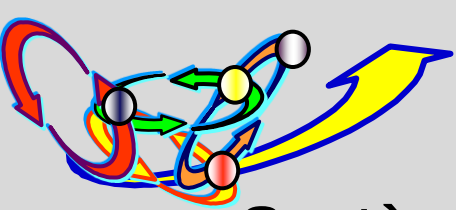
- Suite logistique $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$ [*]
- Quand on calcule bêtement, à la main, ou avec une HP 11C (si, si, ça existe encore), ou avec Excel, les termes un à un, x_0 étant arbitrairement choisi entre 0 et 1 :
 - ex. pour $\mu = 2,8$, $x_0 = 0,5$: $x_1 = 0,7$; $x_2 = 0,588$; $x_0 = 0,5$: $x_1 = 0,7$
 - on trouve que x_n tend vers **une** limite fonction de μ , tant que μ ne dépasse pas 3
 - au-delà, x_n tend vers **2** limites elles aussi fonctions de μ - *et ça n'est pas fini...*



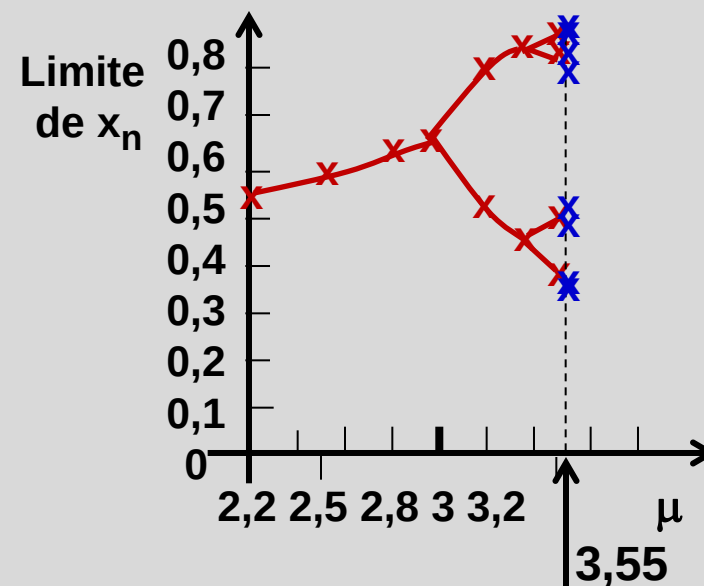


Systèmes chaotiques - suite

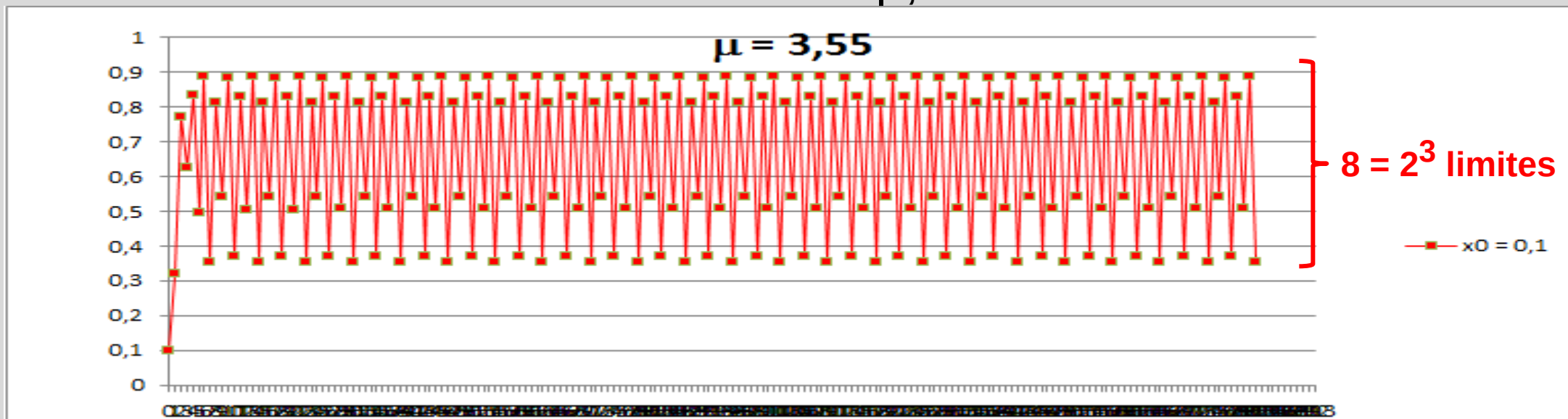


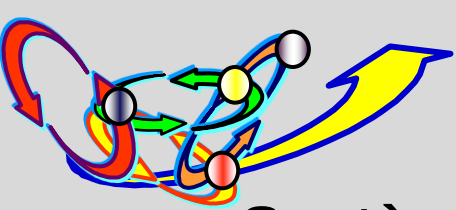


Systèmes chaotiques - suite



2^2 limites si $3,449.. < \mu < 3,54$
 2^1 limites si $3 < \mu < 3,449..$
 2^0 limite si $\mu < 3$



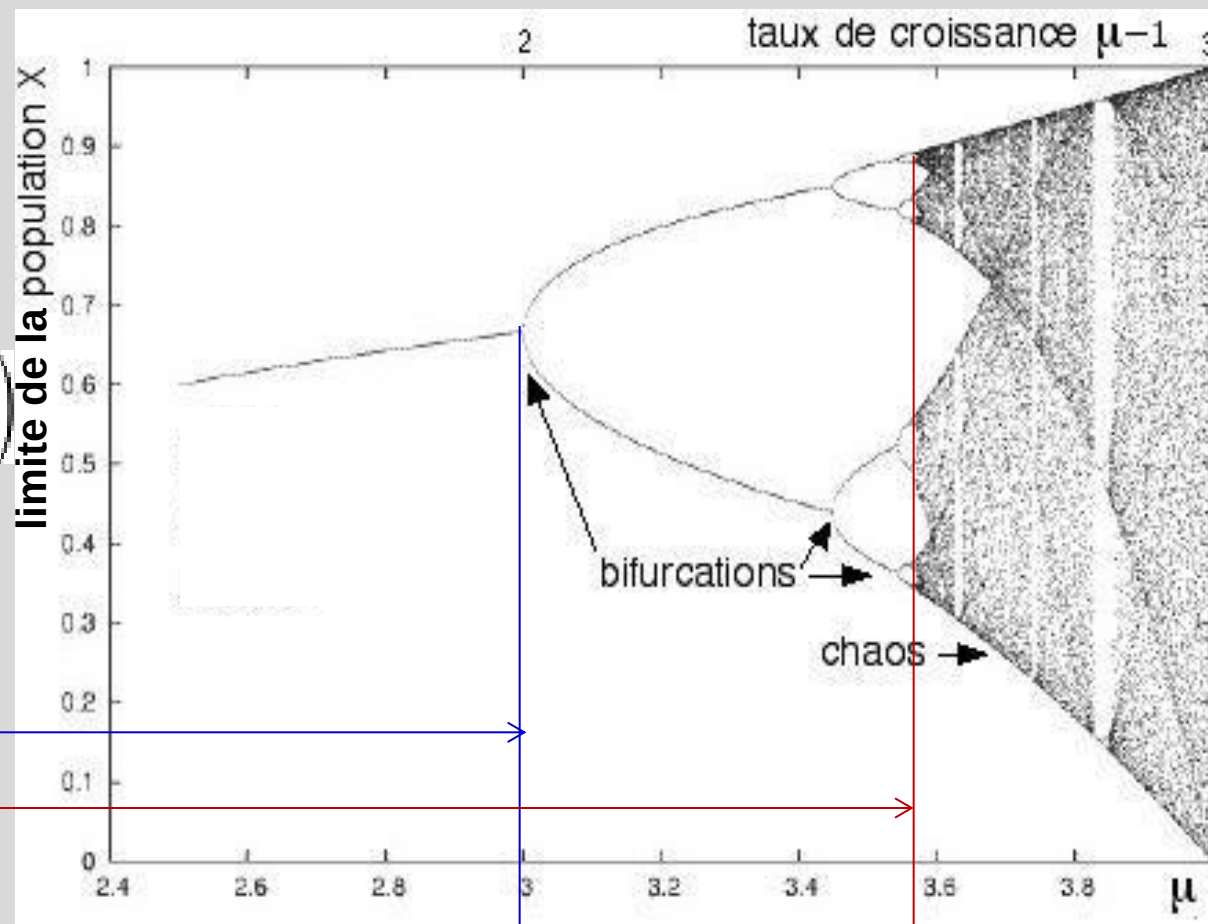


Systèmes chaotiques - suite

Route vers le chaos

Suite Logistique

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$



$\mu = 3$

$\mu = 3,57$

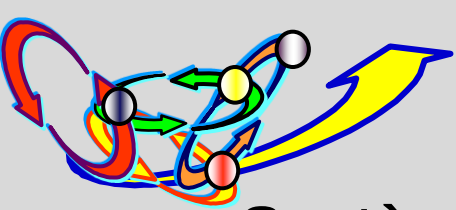
Point fixe attractif

Attracteur
(orbite périodique)

En $\mu = 3,57$

Attracteur de Feigenbaum fractal
(non étrange)

Route vers le chaos
la plus courante :
*succession de
bifurcations
fourches* (séquence
de Feigenbaum)



Systèmes chaotiques - suite

Calculs élémentaires

La limite de la suite

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

est $L = (\mu - 1) / \mu$

μ	L
2,4	0,5833..33..
2,5	0,6
2,8	0,642857...
3	0,6666..66..

(valable si $\mu \leq 3$)

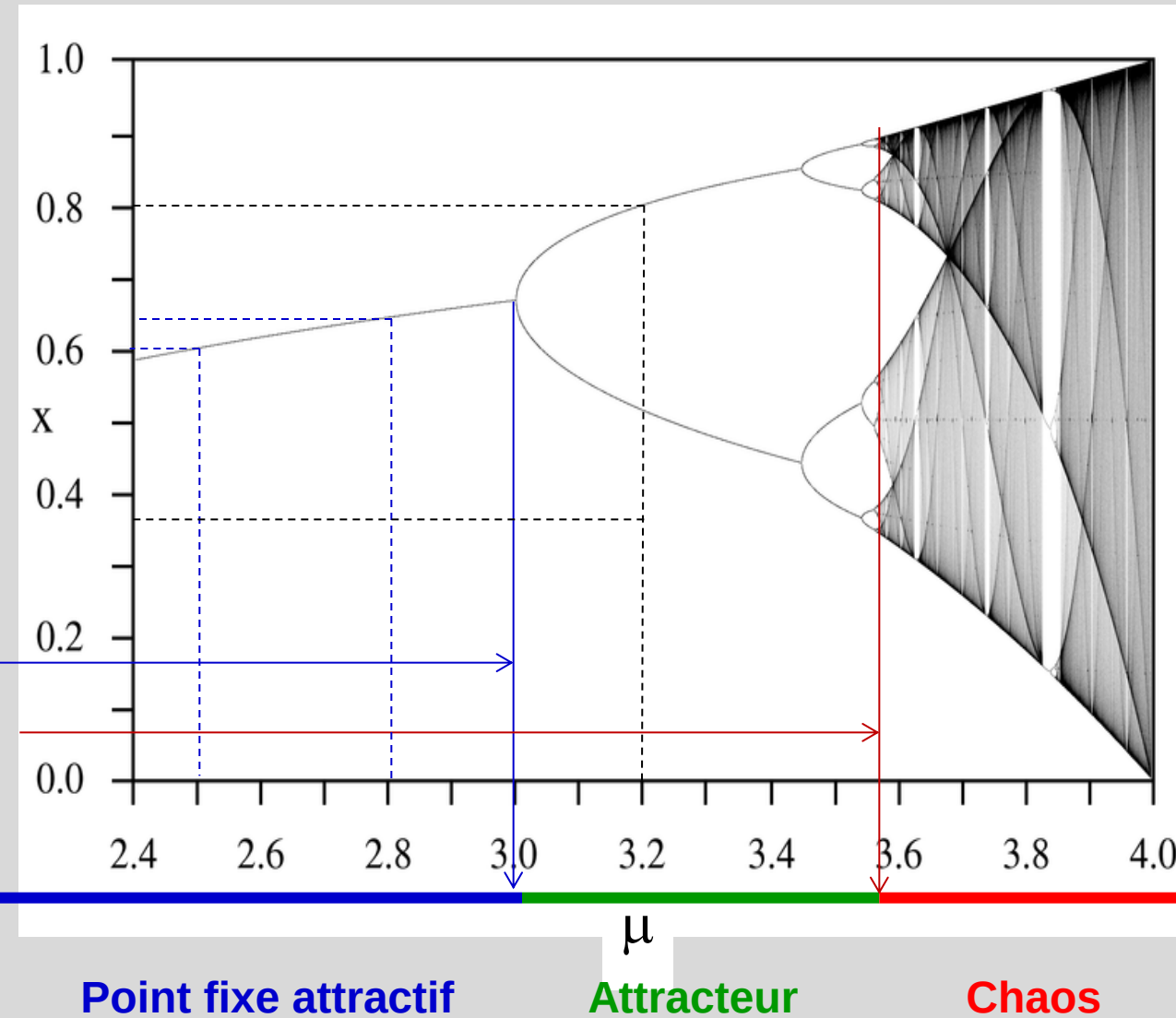
En $\mu = 3$ la convergence est très lente

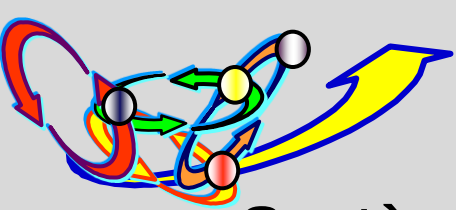
Au-delà, p.ex. $\mu = 3,2$, le calcul élément par élément conduit à 2 limites :

0,513044509 et 0,799455491

Moins élémentaire :

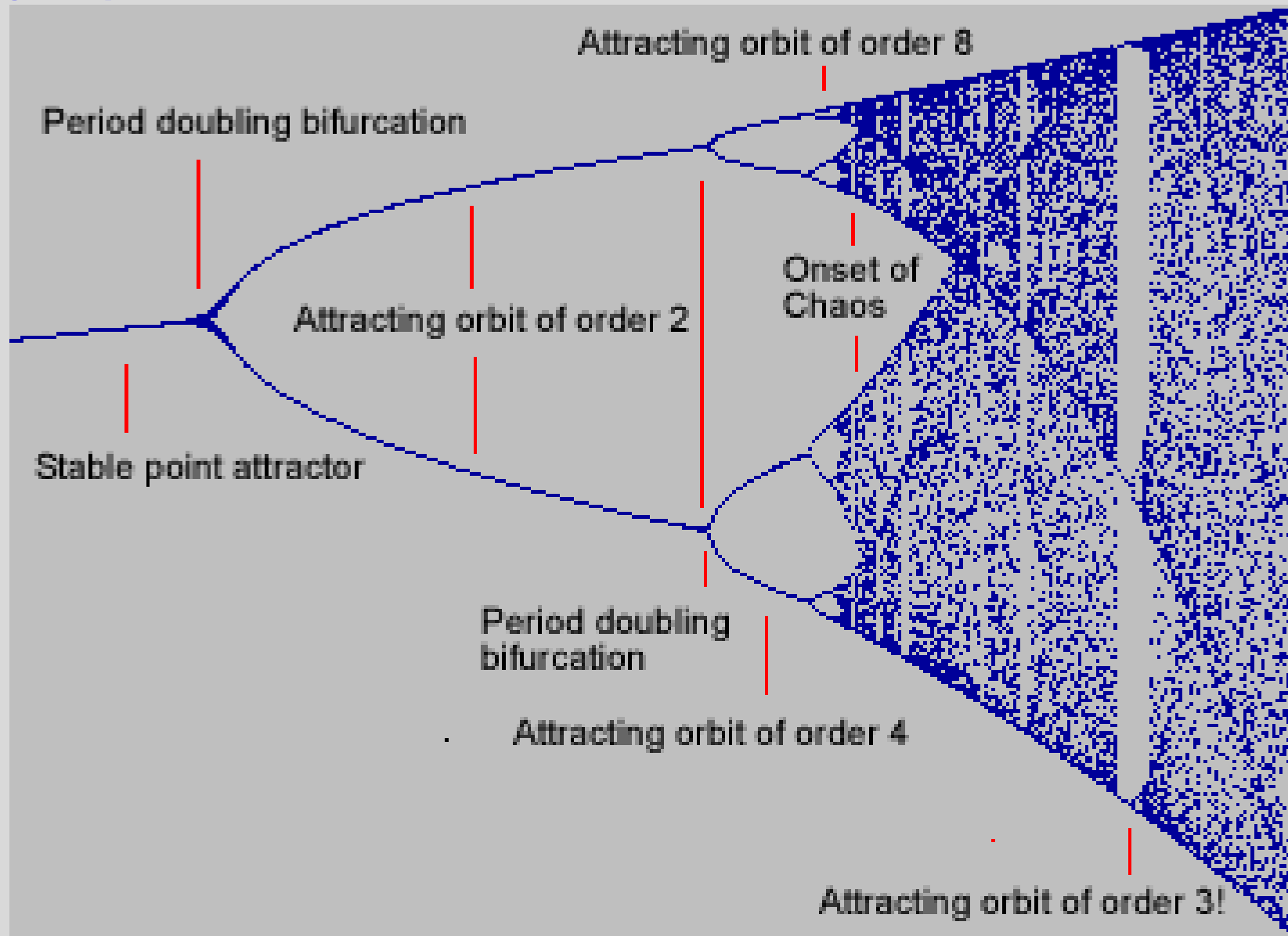
Entre $\mu = 1 + \sqrt{6}$ (3,45..) et $\mu = 3,54$ la limite oscille entre 4 valeurs, au-delà entre 8 valeurs, puis 16, 32... ; le chaos s'installe à partir de $\mu = 3,57$...

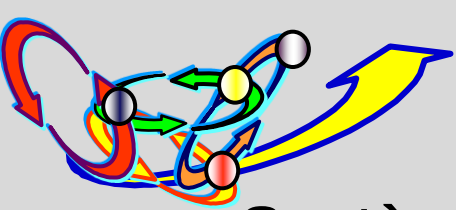




Systèmes chaotiques - suite

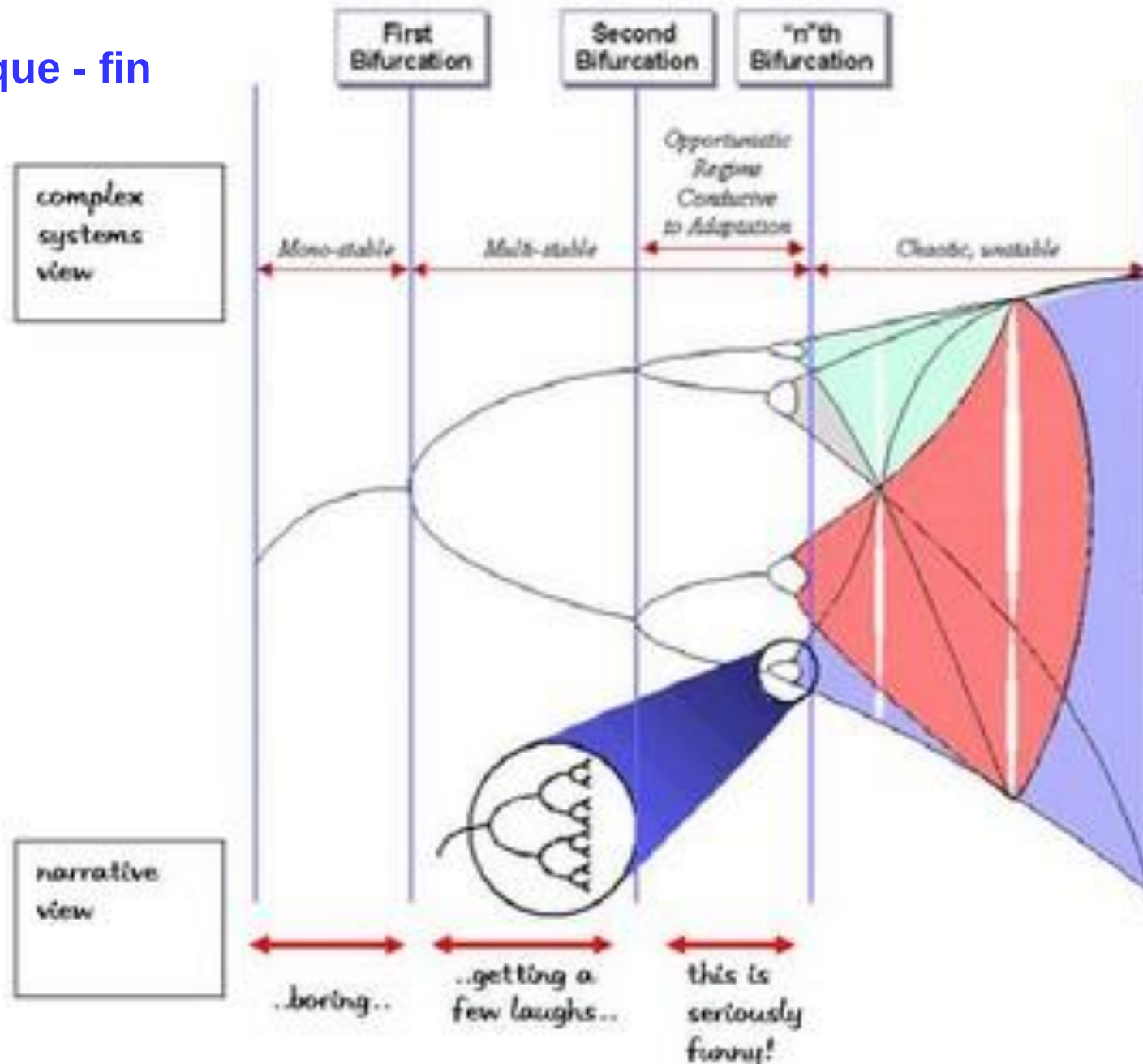
Logistique - suite

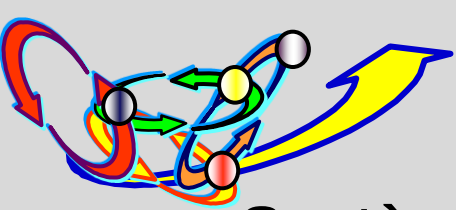




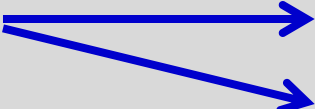
Systèmes chaotiques - suite

Logistique - fin

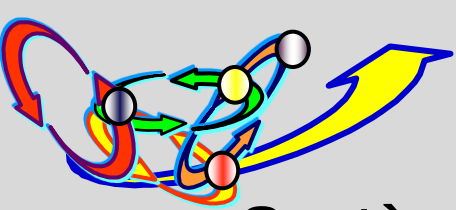




Systèmes chaotiques - suite

- ❑ **La métaphore du papillon : « petites causes, grands effets » ?**
 - Conférence de Lorenz (1972) à l'*American Association for the Advancement of Science* « *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas?* »
 - **Le battement d'ailes du papillon ne provoque pas la tornade [*] mais induit sur le Système une différence de comportement dont l'effet est la tornade**
 - **Battement d'ailes**  **Tornade**
Pas de tornade
 - ⇒ **Le battement d'ailes du papillon peut aussi empêcher la tornade !**

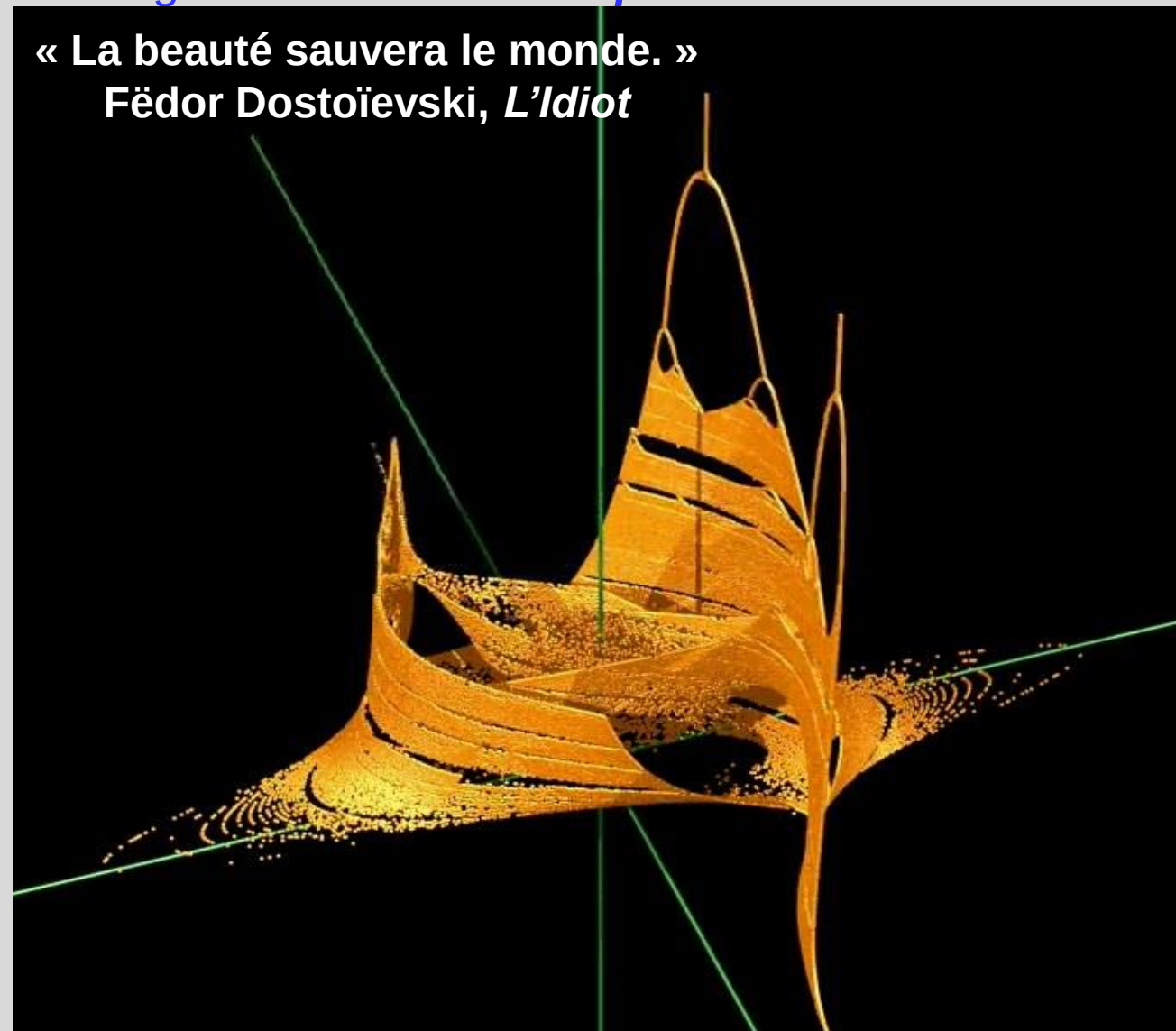
[*] ce qui pourrait être vrai dans un Système Linéaire, cf. démarrage d'un oscillateur



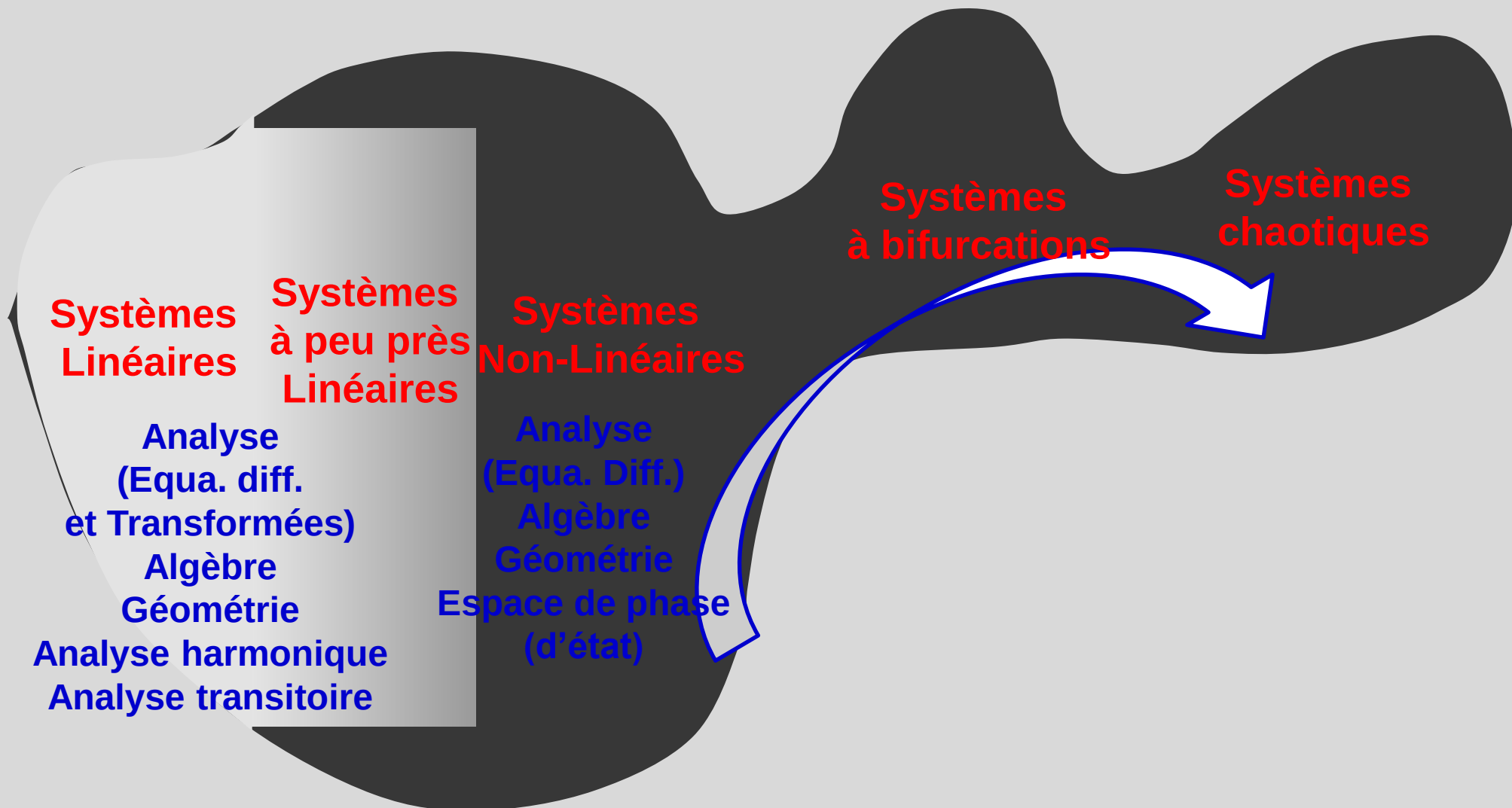
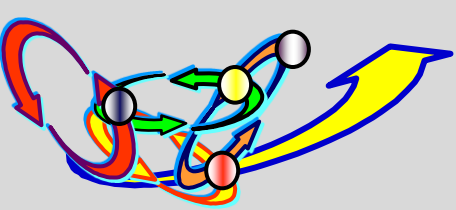
Systèmes chaotiques – suite et fin

- Pour les math-addicts sévères et les esthètes (ce qui n'est pas incompatible), ce site du CNRS : images.math.cnrs.fr/Sculptures-du-chaos.html

Chaos économique :
Van der Pol + boucle de
rétroaction



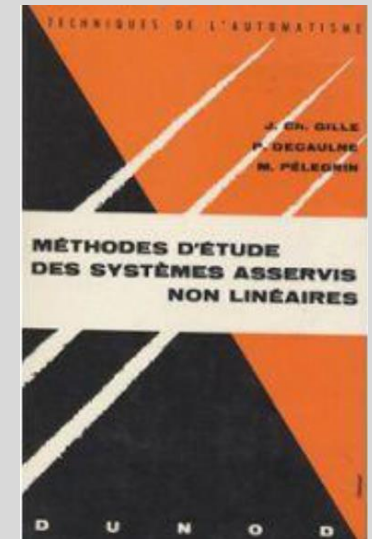
ou taper :
bifurcation Van der Pol
et cliquer sur « *images* »





Bibliographie succincte sur le non-linéaire

- ❑ Méthodes d'étude des systèmes asservis non-linéaires – J.-C. GILLE, P. DECAULNE, M. PELEGRIN, Dunod



- ❑ Etude des systèmes non-linéaires – Cours Master 2 : Commande robuste et systèmes non-linéaires – Frédéric LAUNAY

www.lias-lab.fr/perso/fredericlaunay/Cours/RCA/Cours_Master.pdf

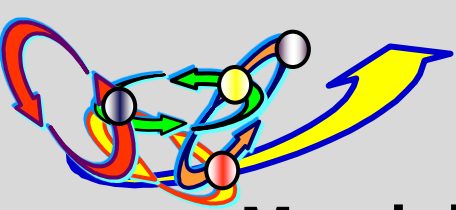
- ❑ Wikipedia : Système dynamique - Théorie du chaos – Suite logistique

Il n'y a pas que des math. dans ces références (il y a des explications et des interprétations en bon français),

mais il faut quand même



aimer un peu les math...

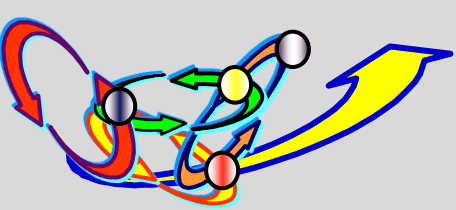


Merci de votre attention.

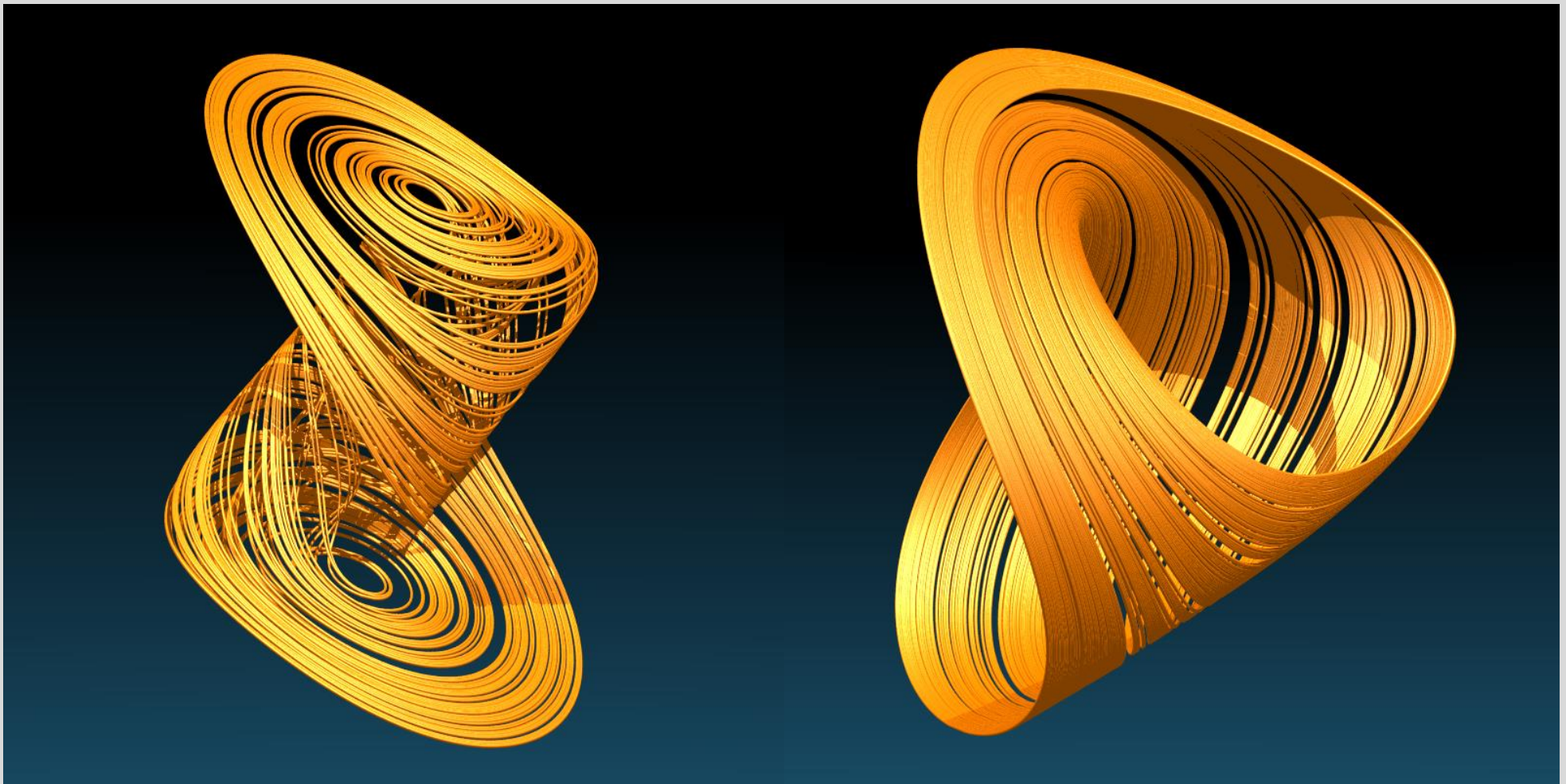
A vous...

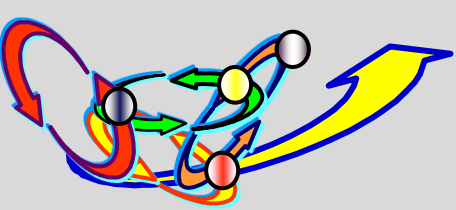
- ❑ **Encore quelques morceaux de citron ?**



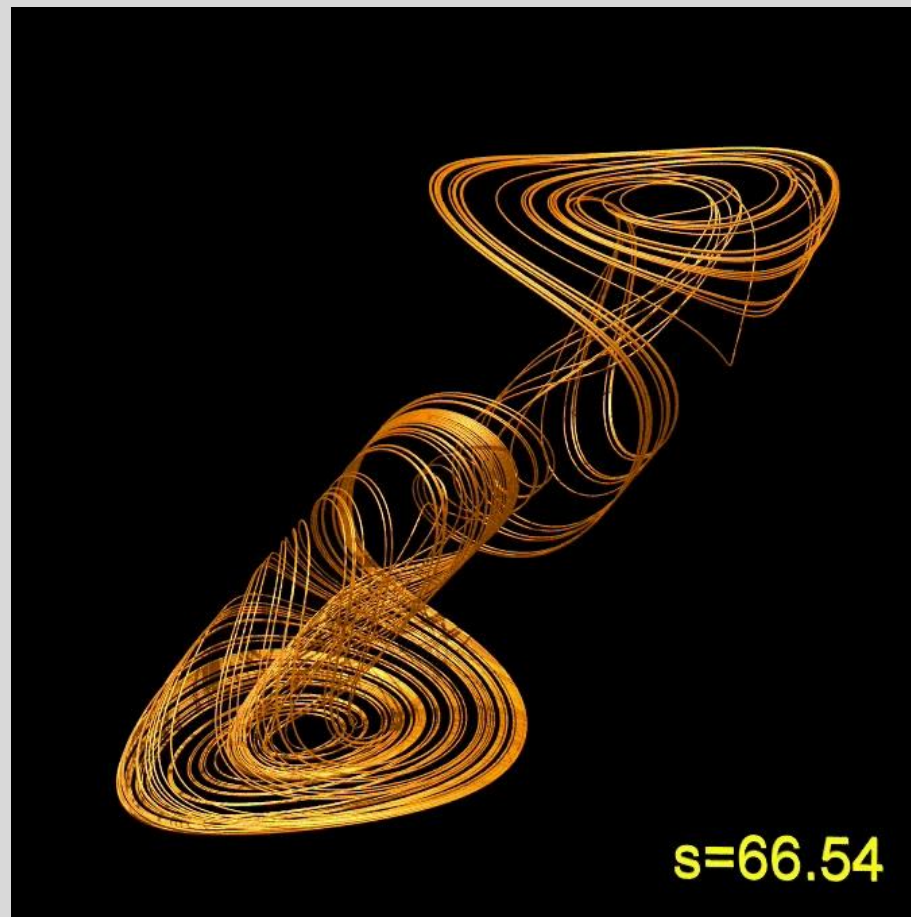


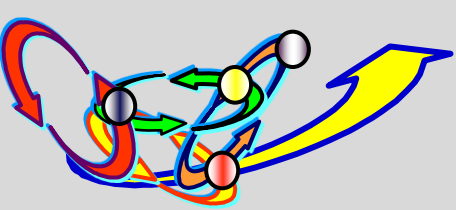
□ Chaos économique : Van der Pol + boucle de rétroaction



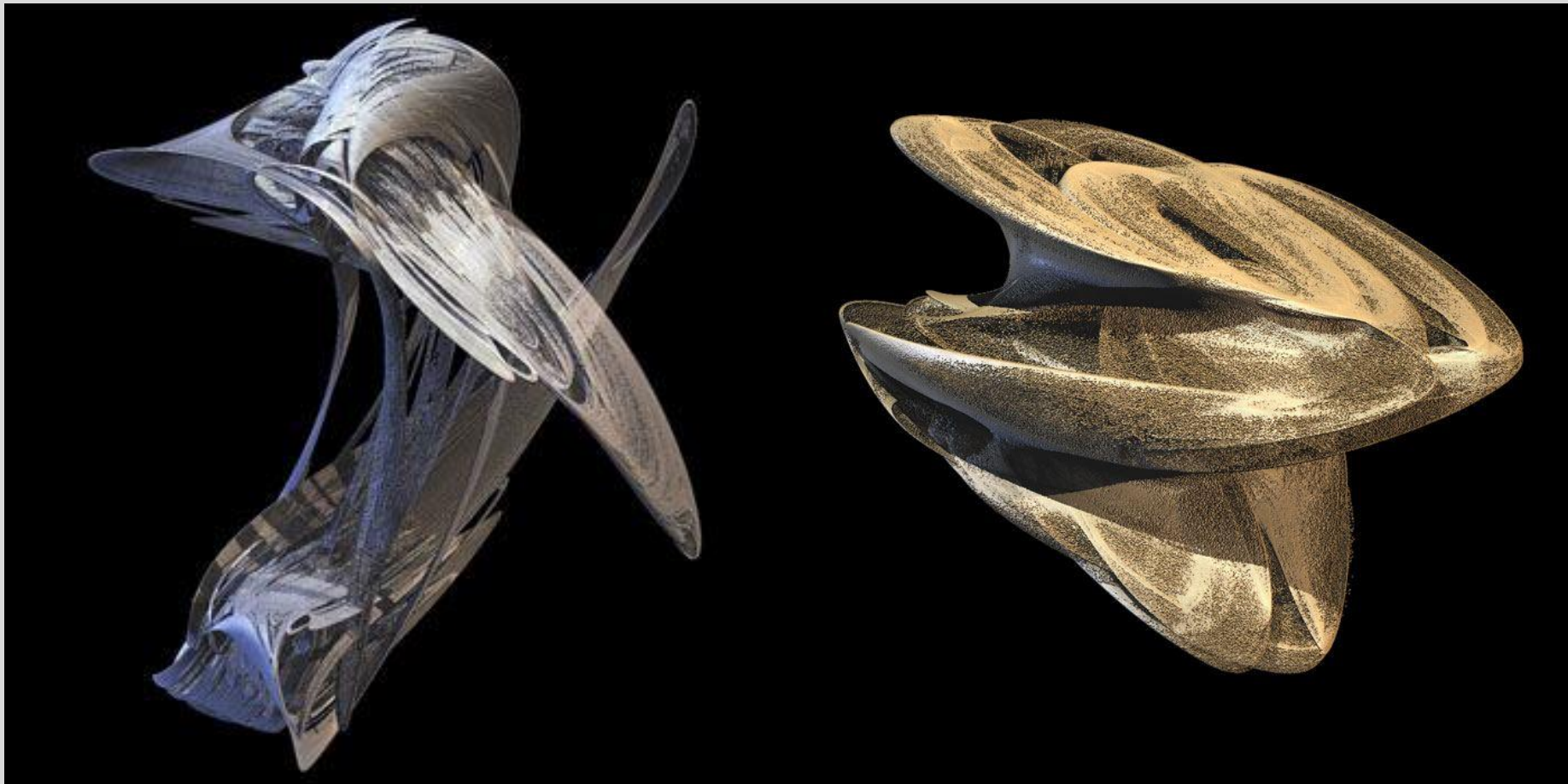


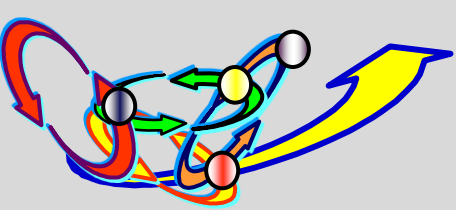
□ Chaos économique : Van der Pol + boucle de rétroaction



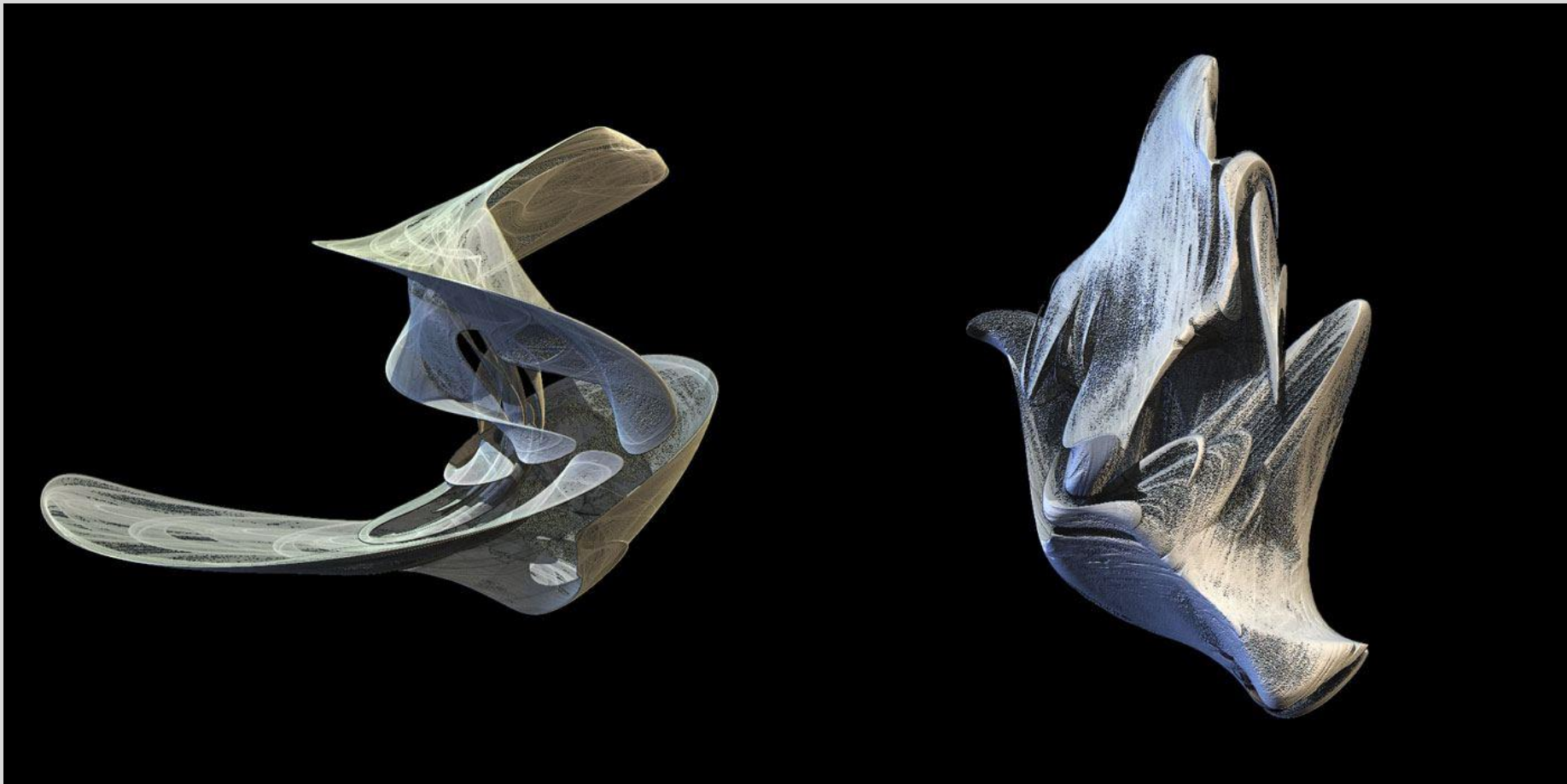


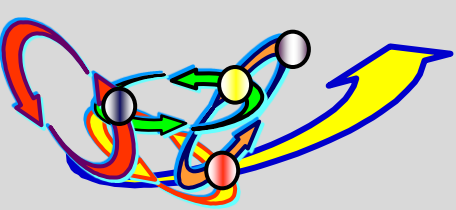
□ **Attracteur étrange de Hénon (1976) (orbites stellaires)**



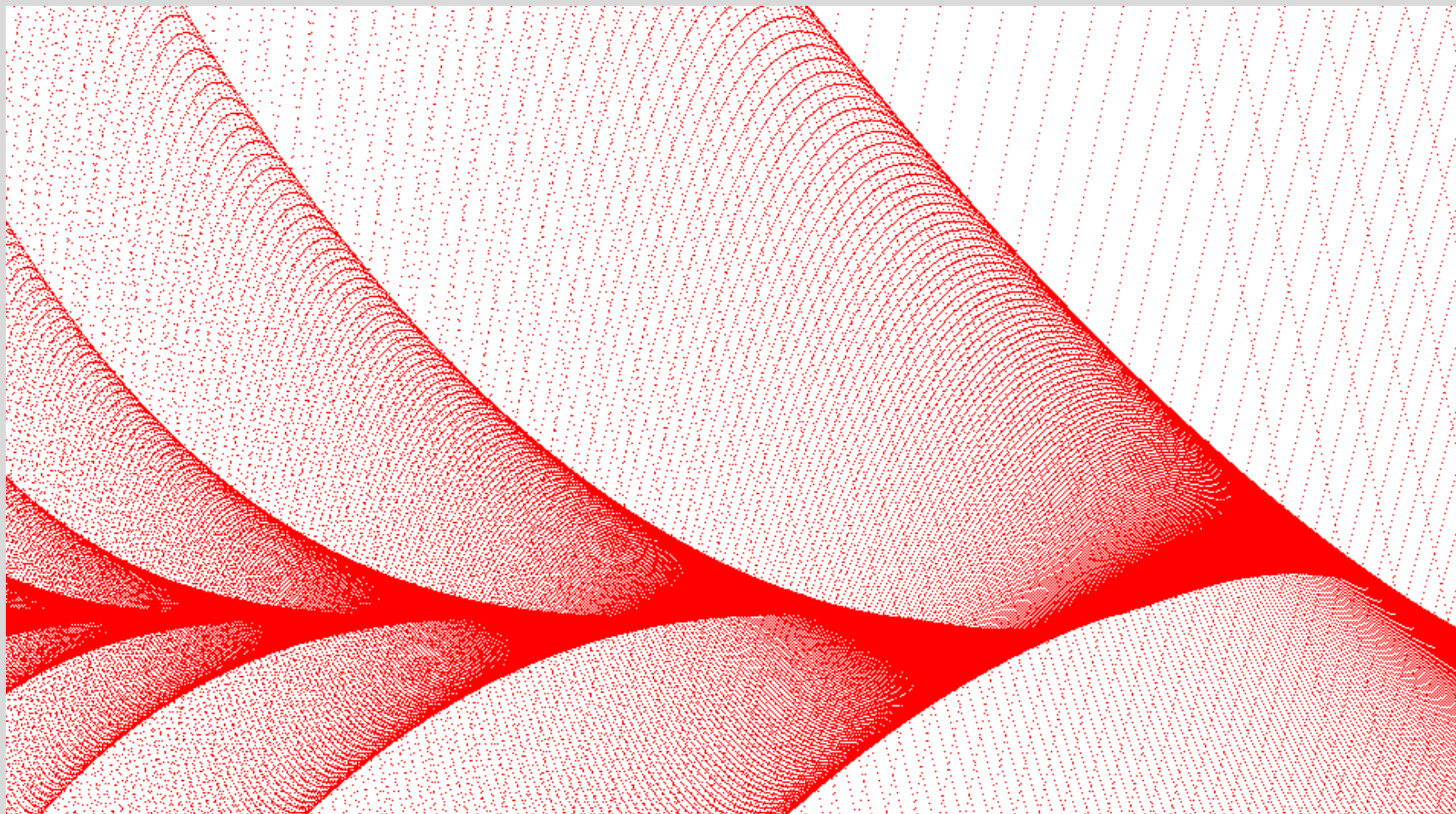


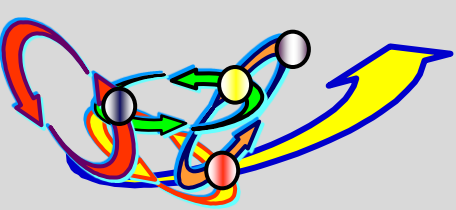
■ **Attracteur étrange de Hénon (1976) (orbites stellaires)**





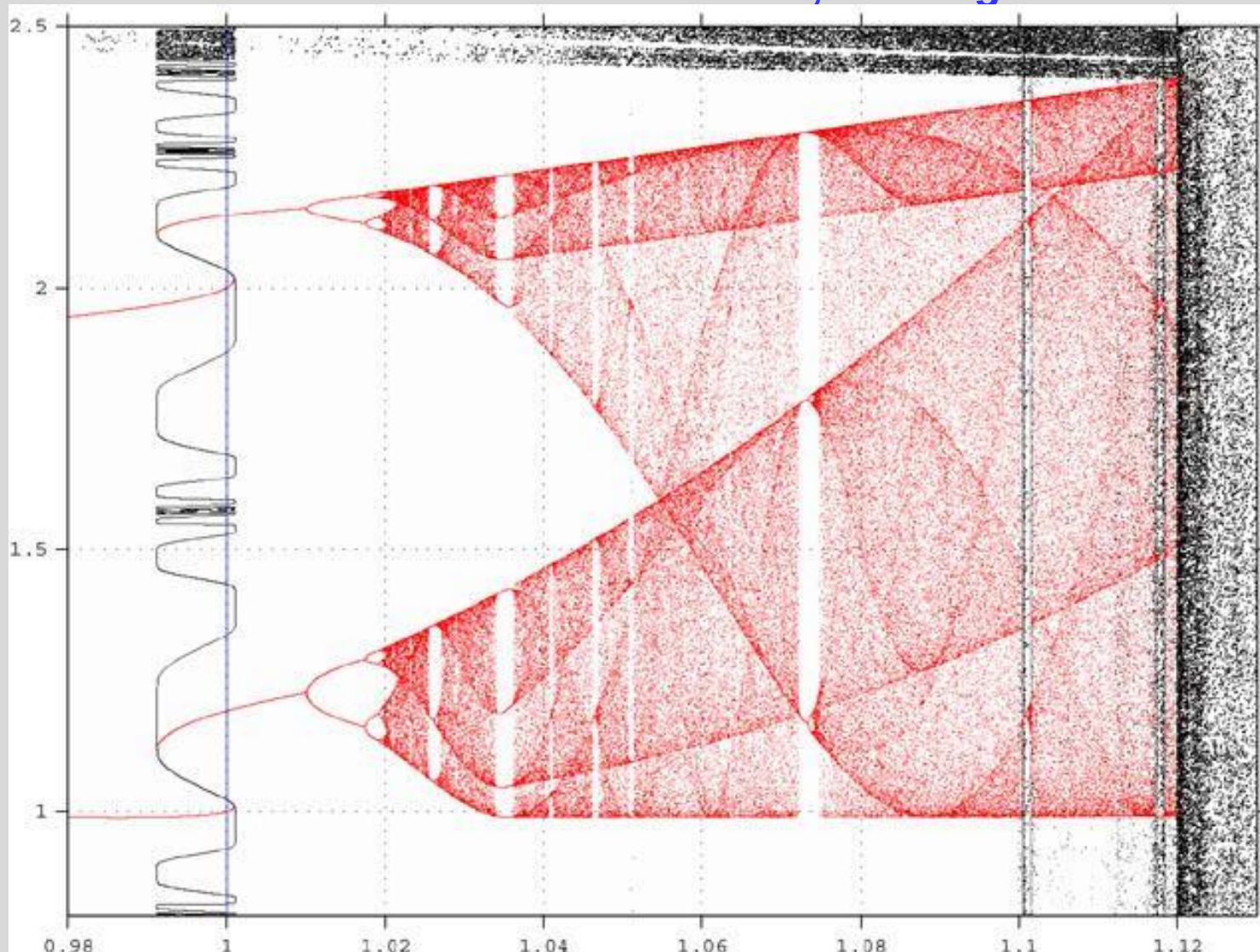
■ Bifurcations du modèle de Lorenz

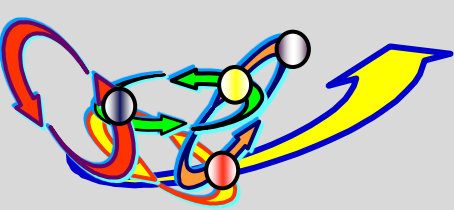




□ Bifurcations du « problème de Syracuse »

En noir la frontière des bassins d'attraction, en rouge les attracteurs

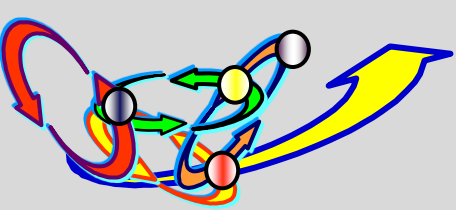




□ Fonction Logistique : Valeurs des limites en fonction de μ

				Bifurcation en		Bifurcation en		Bifurcation en		
					3		$1 + \text{rac}(6) = 3,44948974$		3,54.....	
μ	2,2	2,4	2,5	2,8	3	3,2	3,4		3,5	3,55
limite(s)	0,5454545..	0,5833..33..	0,6	0,6428571	0,666..66..	0,5130445	0,4519633		0,8749973	0,8873709
	(6/11)	(7/12)			(2/3)	0,7994555	0,8421544		0,8269407	0,8816843
									0,5008842	0,8278051
									0,3828197	0,8126557
										0,5404748
										0,5060305
										0,3703256
										0,3548004





- « Notre second exemple sera fort analogue au premier et nous l'emprunterons à la météorologie. Pourquoi les météorologistes ont-ils tant de peine à prédire le temps avec quelque certitude ? Pourquoi les chutes de pluie, les tempêtes elles-mêmes nous semblent-elles arriver au hasard, de sorte que bien des gens trouvent tout naturel de prier pour avoir la pluie ou le beau temps, alors qu'ils jugeraient ridicule de demander une éclipse par une prière ? Nous voyons que les grandes perturbations se produisent généralement dans les régions où l'atmosphère est en équilibre instable. Les météorologistes voient bien que cet équilibre est instable, qu'un cyclone va naître quelque part ; mais où, ils sont hors d'état de le dire ; un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là, et il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées. Si on avait connu ce dixième de degré, on aurait pu le savoir d'avance, mais les observations n'étaient ni assez serrées, ni assez précises, et c'est pour cela que tout semble dû à l'intervention du hasard. Ici encore nous retrouvons le même contraste entre une cause minime, inappréciable pour l'observateur, et des effets considérables, qui sont quelquefois d'épouvantables désastres. »

Henri Poincaré, *Science et Méthode*, Flammarion, 1908.