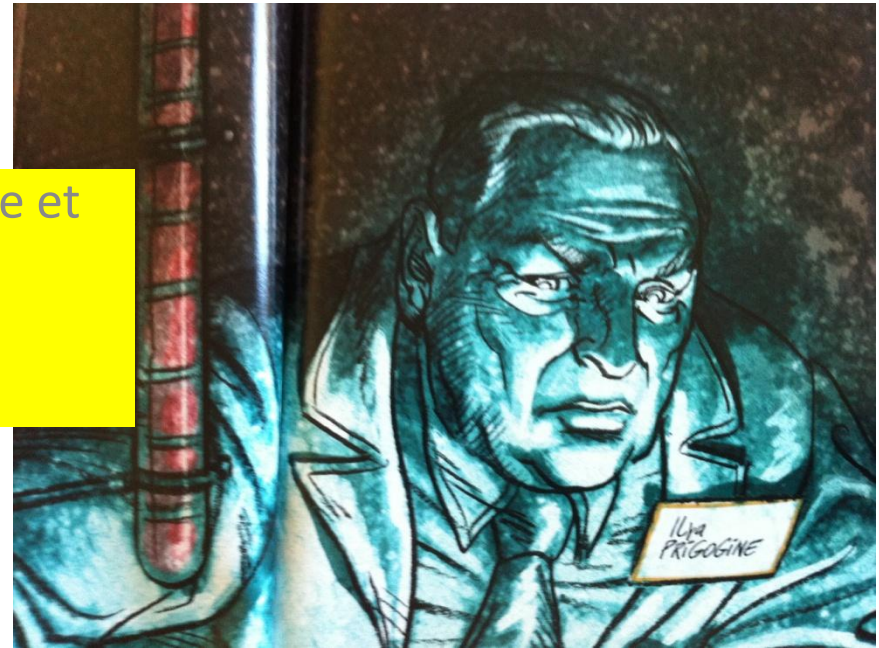


« Fin de la certitude »

Le déterminisme scientifique a-t-il vécu?

Exposé basé sur les travaux d'Ilya Prigogine et plus particulièrement son ouvrage :
« The end of certainty »



Bernard DECUGIS
19 nov 2012

Remerciements et avertissements

- A M.BLOCH , à nouveau....
 - Jamais 2 sans 3 ...
- A mon épouse surtout...
- Prigo c'est du costaud.....pas un « kdo »
 - Pas pédagogue pour 2 sous
 - Après tout, c'est pas ce qu'on lui demande..
 - Je soupçonne Michel....
- Bref...
 - Essai de clarification
 - Remonter aux sources
 - Impossible d'éviter les maths...
- Pardon à certains d'être trop basique , à d'autres trop pointu
 - Excuser les retours et redites : c'est pire ds le bouquin!!
- Cerveaux droit et gauche : je n'en suis pas si sûr... j'ai fait mon possible..
 - Citer K Popper sur le « dilemma of determinism » (W.Jammes), sa relation au « sens-signification du temps » et le déni de la « flèche du temps »

- **Ilya Prigogine**
([25 janvier 1917](#) - [8 mai 2003](#))
est un [physicien](#) et un [chimiste belge](#) d'origine [russe](#).
Il a reçu le [prix Nobel de chimie](#) en 1977, après avoir reçu la [Médaille Rumford](#) en 1976.
- Il est connu surtout pour sa présentation sur les [structures dissipatives](#) et l'[auto-organisation](#)
- Et pour ses travaux sur la flèche du temps visant à partir de la thermodynamique à réconcilier la physique le sens commun et la réalité de la nature.

Abstract

- Une physique qui n'intègre pas une explication du temps comme composante essentielle de la Nature est « incomplète ».
- Le temps et la flèche du temps (irréversibilité) ne sont pas « intégrés » ds la Phys-C ni MQ qui décrivent les choses en termes de trajet/évolutions REVERSIBLES qui sont une idéalisation du réel.
 - Cette idéalisation suppose une précision $\propto$ des C.I. $\rightarrow$ Or l'exact n'existe pas ds la réalité
 - L'outil math est exact $\rightarrow$ La réalité ne l'est pas, l'exact restera tjrs théorique
 - Cette idéalisation n'est pas souhaitable ni opportune car *trompeuse*
 - Mise en évidence par H.POINCARÉ : pb des 3 corps
 - Le réel « est » COMPLEXE: il peut se simplifier $\rightarrow$ domaines de validité $\rightarrow$ si on n'en est pas « dupe »
 - **C'est cette complexité qui crée l'émergence de la FdT qui $\rightarrow$ l'irréversibilité du réel par rapport à la réversibilité du théorique**
- » **L'impasse de la fin du 19 ème : l'impossibilité de trouver un sens à l'irréversibilité dans un monde (décrit) par des trajectoires réversibles $\rightarrow$ se retrouve au niveau de la MQ :**
 - Le phénomène quantique suppose l'irréversibilité $\leftrightarrow$ complexité extrême
 - Plus encore : le pb de la mesure est un processus irréversible qui ne peut être représenté par l'éq de SchrÖ :
 - Coexistent donc en M-Q 2 types d'évolutions :
 - » Une continue et réversible (eq de Schrö est linéaire)
 - » Une discontinue et irréversible lors de la mesure
- **Ne convient-il pas d'examiner le problème sous un tout autre angle ?**

$\rightarrow$ C'est le thème du livre « The end of certainty » et de l'exposé.

Plusieurs façon d'aborder le pb..

- Avant toutes les autres j'ai envie de commencer par parler de nombres:
- Les nombres : inventés par l'homme pour répondre à des besoins qui ont évolué et ont entraîné l'invention de nouveau nombres
 - Les entiers >0 : 1,2,3,... j'ai 10 chèvres,...
 - Les entiers <0 : -1,-2,-3.... je t'en vends 5,...
 - Le zero : on m'en a volé 5,...
 - Les premiers et autres nb curieux (nb d'or, ..)
 - Les rationnels : ma part de gateau, $2x+5=0$,...: $n=p/q$
 - p/q = nb decimal ex $5/10=0,5$ suite finie
 - p/q = suite infinie $\rightarrow$ ex $1/3=1,333333....$ MAIS $\rightarrow$ périodique $\rightarrow$ prévisible
 - Les irrationnels : suite infinie MAIS imprévisible = chaotique : $\sqrt{2}$
 - Les transcendants : π , e ,... AUSSI suite infinie imprevisible, de plus ne sont solutions d'aucune équation
 - Les complexes : besoin d'inventer le nb $\sqrt{-1} \rightarrow$ representation graph $\rightarrow$ on passe de la ligne au plan entier
- Quels sont les plus nombreux ?
- Et quelle est leur caractéristique essentielle ?

Et puis au cœur du Panthéon
Les STARS : $\sqrt{2}$ π et aussi e

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Voir **2 = $\sqrt{2}$** en annexe

Les nombres algébriques sont comme les étoiles sur le fond du ciel,
et l'obscurité épaisse est le firmament des nombres complexes. M. Boll – Cité par [A. Moatti](#)

transcendants

Cf annexe

Plusieurs façon d'aborder le pb.. Les nombres encore :

Le point clé →

Alors que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, celui des nombres transcendants, est largement >>>> "plus grand", est indénombrable,

Les nombres qui nous sont le + familiers (dont nous nous servons au quotidien)s'ils devaient être tirés au hasard, ont 0 chance d'être élus

After explaining to a student through various lessons and examples that:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$$

I tried to check if she really understood that, so I gave her a different example. This was the result:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = \infty$$

La quasi-totalité est « infinie-imprévisible-> chaotique »
Et nous n'en sommes généralement pas conscients

Enfin l' « infini » reste un mystère : d'autant qu'il en existe plusieurs (CANTOR)

Simplifier le réel : OK si on n'en est pas « dupe »
Ne pas prendre le « simple » pour le « réel »

Plusieurs façon d'aborder le pb...: DESTIN vs Libre-arbitre

- Et puis on peut continuer un peu avec le cerveau gauche :
- L'homme est-il l'acteur passif inconscient de son destin ou bien en décide-t-il en plein libre arbitre?
 - Si l'univers est déterministe ...alors quelle est sa loi?
 - Quelles implications?
 - Et s'il ne l'est pasalors la phys doit intégrer l'irréversibilité du temps
 - Refléter le réel

Encore un peu de cerveau gauche:

1. Ordres de grandeur et humilité

Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie. Pascal

1. Les maths et la physique

- les M = absolu-idéal, la Phy = un relatif-concret
- domaine de validité
- EFFICACITE ds ce domaine

Ne pas s'encombrer le cerveau inutilement : les lapins et les renards de Laughlin

2. Notre compréhension de la Nature est mathématique

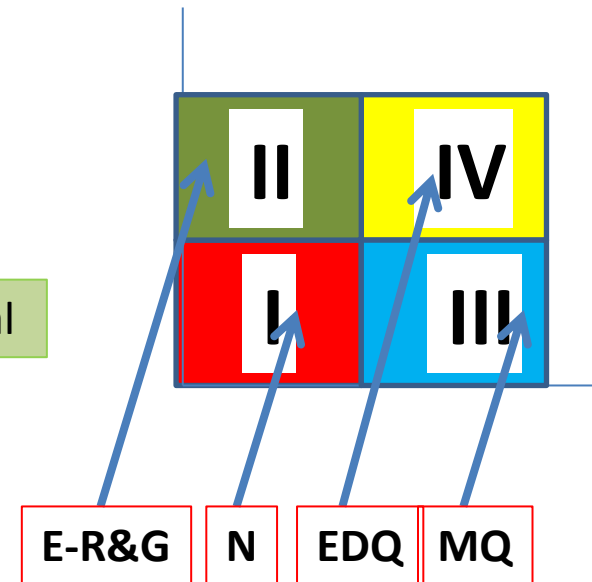
pourquoi ? On ne sait pas

« il est déjà extraordinaire qu'on puisse comprendre la nature » (E)

- puissance de la loi N sur gravitation → à l'infini

et qu'on puisse passer de I à II à III et IV

- Avec des gaps = MQ et G, etc...

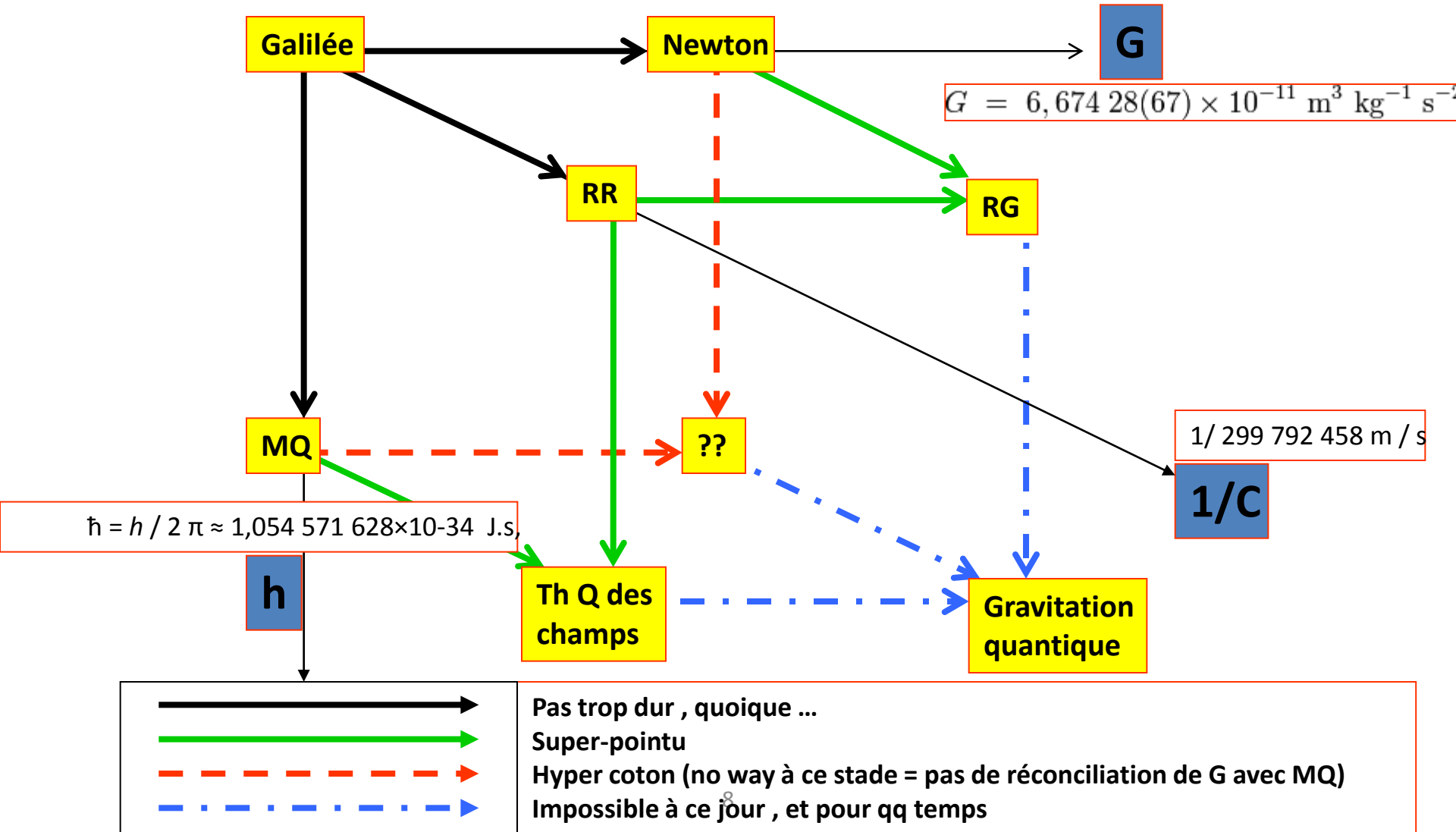
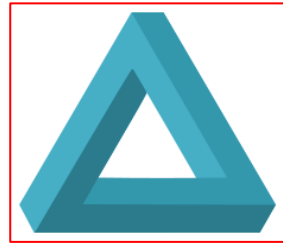


•ORDRES de Grandeur

•Masse	kg	10^{-30} (me)	10^{-4}	10^{+3}	10^{+52} (mass univers)
•Length	m	10^{-35} (IP)	10^{-4}	10^{+4}	10^{+26} (diam univers)
•Time	s	10^{-42} (tP)	10^{-1}	10^{+4}	10^{+17} (age univers)

Il n'y a aucune raison pour que ce qui marche ds $\varepsilon(\varepsilon(\varepsilon(\varepsilon)))$ % marche pour 100%

Contributions : Roger PENROSE



Plusieurs façon d'aborder le pb..

1. Il ya eu N (méca classique), puis E (méca quant), → l'ère d'après est annoncée mais ne s'est pas encore bien trouvée...
2. La phys-trad est REVERSIBLE : le temps est un param. (Que l'on peut inverser par la pensée)
la phys de demain devra intégrer l'irréversibilité → sans rien détruire de l'existant qui a largement fait ses preuves
3. La phys-trad décrit de situations stables, à l'équilibre à la différence des situations en transition , des « syst dynamiques »
4. Cette phys-trad est « idéale » : le point « immatériel », la trajectoire , la masse....
 - L'idéal n'existe pas dans la réalité :- la réalité fluctue autour:
 - sans effet si sys-stable
 - avec d'énormes effets si instable
5. PRIGO: « Cette idéalisation n'est non seulmt pas exacte mais « inappropriée » »
6. On peut ainsi opposer « déterminisme » et « hasard », c-à-d « destin » et « libre arbitre » → considérations philosophiques
7. PRIGO : pour enfin constater que : si la Phys n'était que trad et donc déterministe → la vie elle-même n'existerait pas : alors, le hasard et la nécessité , à nouveau ?

- Tout ça tourne donc autour de notre représentation du temps
- Et plus exactmt de la fameuse « flèche du temps »

Le temps, donc....

- Le temps est un mystère... et ça ne date pas d'hier:
 - St Augustin...Einstein...Etc...
- Pendant longtemps... $\rightarrow$ temps = t , $t \rightarrow -t$: ça marche aussi
- On s'est qd même rendu compte que ça marchait pas tjrs:
 - œuf ne revient pas ... le morceau de sucre non plus...
- Les prémisses : 1811 Fourier, étude de la propag de la chaleur et 1824 Sadi C : 2^{ème} principe de la Th. $\rightarrow$ la chaleur va du chaud au froid $\rightarrow$ de façon IRREVERSIBLE
- Puis BOLTZMANN , par analogie avec Darwin :
 - L'évolution est manifestmt « fléchée » et donc irrév.
 - Essaie de trouver une « approche évolutionniste » rendant compte du car irréversible.
 - Introduit l'Entropie $S = k \log W$
 - Les 2 remplacent « individus » par « populations »

Darwin $\rightarrow$ émergence de nouvelles espèces $\rightarrow$ SUCCES planétaire

Boltzmann $\rightarrow$ « mécanique statistique » , laquelle agrège des comportements élémentaires réversibles , recherche évolution vers l'équilibre: $\rightarrow$ ECHEC

$\rightarrow$ impossibilité de réfuter le arguments déterministes

$\rightarrow$ le poids de ce qui marche et qui marche bien : la statue du Commandeur N

$\rightarrow$ P $\propto$ = expliquer l'irrev en s'appuyant sur des T révers est une erreur logique

$\rightarrow$ ECHEC $\rightarrow$ dépression $\rightarrow$ suicide (1906)

Que disent les déterministes ?

L'irréversibilité n'est qu'une « apparence »
Ce n'est pas une loi de la nature
Elle résulte de notre incapacité à « cerner »
le problème dans toute sa dimension

- qui ? → tous , sauf PLANCK

- Les particules sont bien sur des traject révers
- Invertissons les vitesses → les particules retournent ds leur passé et l'entropie diminue au lieu d'augm.
- Boltzmann remplace alors l'approche micro par l'approche stat :
 - Néanmoins les part restent sur des traj rév.
 - C'est seulement parce qu'elles sont trop nombreuses (10^{23}) qu'on « approxime » au niv macro CE QUI produit l'irréversibilité

Paradoxe de Loschmidt

- Boltzmann échoue, incompris ...
- Depuis les choses ont changé:
 - L'envolée de la physique des processus dynamiques (non en équil)
 - Auto-org
 - Structures dissipatives
 - Physique des syst instables
 - Aller de l'ordre et la stabilité vers les fluctuations, les choix multiples et la prédictabilité limitée
 - Étendre la MC et MQ pour incorporer instabilité et chaos :
 - Aboutir à une description qui contient la FdTemps

On parle de
Meca dynamique
Syst. instables



Pourquoi cet « aveuglement ? »

Pourquoi cet « aveuglement » ?

- PRIGO: Pourquoi cet « aveuglement » a-t-il duré si longtemps ?
 - Poids de l'establishment scient.
 - Efficacité de la MC-N et + tard de la MQ
 - Revue à travers le formalisme L et $H \rightarrow$ forme canonique unique :
 - Conduisant à penser que tout se résout de la même façon
 - Progrès des outils maths (DIRAC, fcts généralisées de Schwartz,)
 - Tentation de tout expliquer « rationnellement »
 - $E =$ Dieu ne joue pas aux dés
 - Démon de Laplace,

Remettons les choses en perspective....

- N= 3 principes +1 loi
 - Principe d'Inertie
 - Principe de la dynamique: $F=ma$, l'alt du mvmt est prop à la F et ds le m sens
 - Principe d'Action-réaction
 - Gravitation : prop à mm' , inv prop à d^2

- Avant Newton
- Puis Newton vint :
 - N à la croisé de
 - » La description du mvmt des corps (Képler) et chute des corps (Galilée),
 - » Calcul infinitésimal
 - Passage à la limite (paradoxe de Zénon : une somme infiniepeut être finie)
- Avènement et règne sans partage du déterminisme
 - → le démon de Laplace
 - Laplace: il n'y aura pas d'autre N, car il n'y a qu'une physique...
- Trajectoires : $r(t)$
 - Si $r(t)$ connu → $r(t_0)$ détermine entrmt la T (ds le future ET ds le passé): 3 attributs:
- Aboutissement de la méca-classique :
 - À partir du principe de « moindre action »: → un formalisme « passe partout » : une équation unique du mvmt basée sur:
 - Lagrangien $L = T - U$
 - Hamiltonien $H = T + U = \text{Energie totale du syst.}$
 - On peut tout résoudre (on parle de mvmt de systèmes) avec un seul jeu d'équations toujours le même → Annexe

Légalité
Déterminisme
Réversibilité

Et ça marche, et même finement...

Qq précisions

Cf annexe

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

- L' Hamiltonien, $H(p,q)$, est la grandeur fondamentale dont se déduit la description du syst et son évolution
 - Cas simples (ressort, pendule, boulet..)
 - Var canoniques = var usuelles
 - q = pos, p = moment/qté de mvmt grandeurs indépendantes, définies prp à L ou H
 - Peuvent aussi bien représenter d'autres grandeurs
 - Cas + complexes : choisir p,q pour que l' H soit le plus simple à manipuler et intégrer.
 - Car toutes les représentations canoniques sont équivalentes
- QQ soit le mvmt, qq soient les équations → la représentation canon est la même et permet de résoudre le pb.
- En particulier on peut imaginer une structure qui réduise H à T (Eie ciné) avec U (Eie pot) =0, traduisant l'indépendance des points les uns des autres et l'invariance des moments :
 - C'est la caractéristique du concept d'intégrabilité
 - Tout syst dyn intégrable peut se ramener à ce type
 - On retrouve le « TOUT est DONNÉ », pré-déterminé....
- On a cru longtemps que tous les pb's pouvaient se ramener à ça , et que ceux qui ne le pouvaient pas étaient plus sujets à une difficulté concernant notre capacité à les résoudre qu'une « impossibilité intrinsèque »
- Tous les pb's simples ou complexes se ressemblent, puisqu'on peut les poser ss la même forme → on pourrait en conclure que toutes les solutions se ressemblent aussi →
- l'univers , s'il est un syst dyn doit être conçu avec les propriétés des syst dyn intégrables et se trouve donc parfaitement défini et prévisible → d'où le démon de Laplace
- Et pourtant....

- Fin 19^{ème} P $\square$ $\rightarrow$ pb des 3 corps : 2 corps ça va, 3 corps, bonjour....
 - Après d'innombrables tentatives pour résoudre le syst d'éq. $\rightarrow$ ss succès
 - P $\square$ $\rightarrow$ c'est « intrinsèquement impossible » $\rightarrow$ analogie avec , un peu plus tard le « principe d'incertitude » d'H: ce n'est pas un pb de var. cachées mais une caract. intrinsèque du monde quantique.
- Il y avait eu qq 1ères alertes:
 - On savait qu'une trajectoire pouvait devenir « intrinsèquement indéterminée » : cas du pendule rigide à $v=0$, $\theta = \pi$
 - Maxwell déjà avait fait état de l'existence de points singuliers :
 - petite cause $\rightarrow$ grands effets
- En définitive $\rightarrow$ impossibilité intrinsèque
 - Pourquoi? Parce qu'il est impossible de déterminer à 100% les condit initiales, condit nécessaire pour $\rightarrow$ 100% de prédictibilité
 - Supposerait précision = ∞ !
 - $\rightarrow$ Mort du Démon de L

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

- ATTENTION le pb des 3 c est important car REVELATEUR, mais en pratique il ne nous gêne aucunement :
- Le pb des 3 corps n'en est un que si l'on veut une belle équation de chaque trajectoire
- Il y a d'autres moyens de résoudre le pb :
 - on ne serait jamais allé sur la lune sinon,
 - Et Le Verrier n'aurait pas « inventé » NEPTUNE $\leftarrow$ URANUS
- Il s'agit du calcul numérique et l'informatique rend l'effort trivial

Cf annexe

Et cependant.....

- En parallèle s'est développée la Thermodynamique : 1811 Fourier → une théorie existe désormais à côté du monde N
- En somme **PRIGO: la vraie naissance de la complexité**
 - La dynamique de N n'est pas toujours prédictible: ceci illustré par situations d'imprédictibilité intrinsèque
 - Sauf à cerner les conditions initiales avec une précision infinie donc non réaliste
 - Le temps n'est pas vraiment pris en compte (flèche)
 - A côté de cette science qui voulait tout expliquer et tout avaler, se développe une nouvelle science
 - Légitime
 - S'appliquant particulièrement aux phénomènes irréversibles
- → 2 cultures qui s'opposent
 - Et les aspects philosophiques qui les accompagnent....
 - Diderot, Stahl (vitalisme), Kant, Hegel, Bergson, Whitehead
- Avant d'aller plus loin, il nous faut passer par la case : ENERGIE

La chaleur rivale de la gravitation

- 1811 JJ Fourier:
 - Loi de diffusion de la chaleur
 - En France → positivisme → séparation hermétique
 - En UK → comment faire converger 2 disciplines ?
 - Reflexion sur l'irrévers.
 - Joule 1847 : mesure d'un equivalent → Eie
 - Connexion entre → Chimie, science de la chaleur, elect, magnet, biologie
 - Conversion = passer de l'une à l'autre sous l'égide du principe suivant:
- Principe de conservation d'Energie → 1^{er} principe
 - Analogie avec le « rien ne se crée, rien ne se perd , tout se tranforme » (Lavoisier ~ 1780)
 - Résonnance immense → implic. Philosophiques → cervaeux gauches
- 1824 : cycle de CARNOT
- 1850 Clausius → 2ème principe : dissipation, entropie, irréversibilité
 - Entropie= fonction d'état
 - $dS = dS_i + dS_e \rightarrow dS_i \geq 0$ (0 à l'équilibre):
 - ↗ de Si est un indicateur de la flèche du T
 - 1865 → généralisation , Clausius:

Stanley Eddington → € = « arrow of time »

Clausius :

- L' E de l'Univers est C'te
- L'€ de l'U est ↗

Heurt des doctrines

- Mise en perspective:
- D'un côté :
 - le monde de N: le syst evolue sur sa T
 - et conserve le souvenir de son pt de depart → réversible,
 - et la condit init détermine entièrement la T
- De l'autre:
 - le monde thermo : le syst oublit son origine
 - Evolue par entropie croissante vers un même état d'équilibre
 - Seul compte le bassin attracteur
 - Même caract pour tous
 - Qq soit la façon d'y parvenir

∃ 2 types de process :
Ceux qui sont réversibles : mvmt
de la lune , ou des atomes.....
Ceux qui sont irrév : chaleur etc...

- → à nouveau: 2 descriptions fondamentalement différentes
 - La Dynam. → masses en mvmt , traject., prév.....
 - La Thermo → attracteurs, base de la science du complexe , chaos...
 - COMMENT s'articulent-elles ensemble ?
 - Comment passe-t-on de l'une à l'autre?

Expliciter ces
différences

Domaines de validité



Le domaine de validité de la MC et MQ (trajectoires prédictibles) est limité par l'instabilité et le chaos

Encore un peu de Boltzmann

- Fin du 19^{ème}: Les « énergétistes » et les « atomistes » s'opposent...
- Boltzmann , le 1^{er} à s'interroger sur un passage:
 - Trouver des concepts novaux pour élargir la phy des Traj aux situat. de la Thermo.
 - Concept de probabilité
 - Non pas proba au sens hasard, ou approximation → mais comme principe explicatif: → emergence d'un comportement du fait d'être formé par une population très nombreuse appréhendable uniquement de façon statistique:
 - Ex de N part ds une boîte à 2 compartiments → $N_1 + N_2 = N$
 - Le nb de complexions $P(N_1, N_2) = N! / (N_1! N_2!)$ → P max qd $N_1 = N_2$
 - Si $N = 10^{23}$ → tend très fortmt vers $N_1 = N_2 = N/2$ → tout état ≠ de l'équipartition est très improbable
 - Boltzmann → la croissance de l'Entr. = l'expression du désordre moléculaire → gomme toute dissymétrie initiale car très improbable → le syst évolue vers état d'équil = nbre de complexions max. → donc vers un ORDRE
 - Entropie = nbre de complexions → $S = k \ln P$ avec $k = \text{cte de B}$ et $P = N! / (N_1! N_2!)$
 - Par cette formule : l'évol thermo irrévers = évolut vers états de proba croissante → vers état **attracteur** d'équilibre
 - Pour la 1^{ère} fois → une explication en termes de proba
 - La proba explique l'oubli de la distribution initiale et sa dissymétrie
 - Pour évoluer vers l'attracteur
 - Puis fluctuer autour de cet état : compensation stat des effets de fluct
 - Le principe d'ordre → struct phys ordonnées, coexistence de phases..

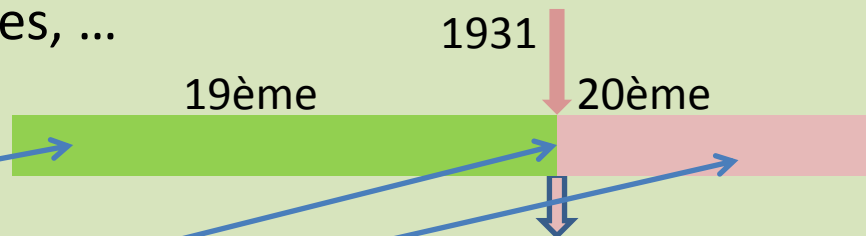
Principe d'ordre de B

Et aussi un peu de Thermo-1: qq rappels

- 2^{ème} principe:
 - Évolution d'un syst thermo= évolut de son Entr
 - $dS = dS_i + dS_e$
 - dS_e = echanges ext
 - dS_i interne , pheno irrev, toujours >0 sauf à l'équil $\rightarrow =0$
 - Si syst isolé ($dS_e=0$) est $dS_i=0 \rightarrow S$ est max
 - Ex de phenos irrevers : diffusion chaleur, diff de matiere, reactions chimiques, ...

- 3 stades

- A l'équilibre
- Proche de l'équilibre
- Non linéaire



Relations de réciprocité d'Onsager
Thermo linéaire $\leftrightarrow$ proche de l'équil.
1^{er} résultat $\rightarrow$ Thermo irrev.

Transfert d'interet : thermo à l'équil $\rightarrow$ non-equil.

Un peu de Thermo-2

- Néanmoins : la Thermo linéaire n'explique pas le paradoxe DARWIN vs CARNOT

Tendance à la
Désorganisation « spontanée »

Apparition « spontanée »
de formes naturelles organisées

- Nécessité d'aller + loin: vers le non-linéaire
- Analogie avec hydrodynamique:
 - Ecoulement laminaire = stable jusqu'à V_{lim}
 - Si $V > V_{lim} \rightarrow$ écoulement turbulent = organisation tourbillonnaire
- Illustration Thermo : les cellules de Bénard

Grad de T° bas vers haut, qui augmente
1/ chaleur monte par diffusion
2/ si T° élevé $\rightarrow$ fin diffusion $\rightarrow$ convection
 $\rightarrow$ déplacement anarchique?
 $\rightarrow$ non, mouvement cohérent
Auto-org $\leftrightarrow$ des 10^{23} cellules

Des milliards de milliards de cellules se meuvent de façon cohérente.
On peut calculer le nb de complexions et mener une approche proba
Le résultat serait ~ 0 : aucune chance pour ce phéno d'auto-org

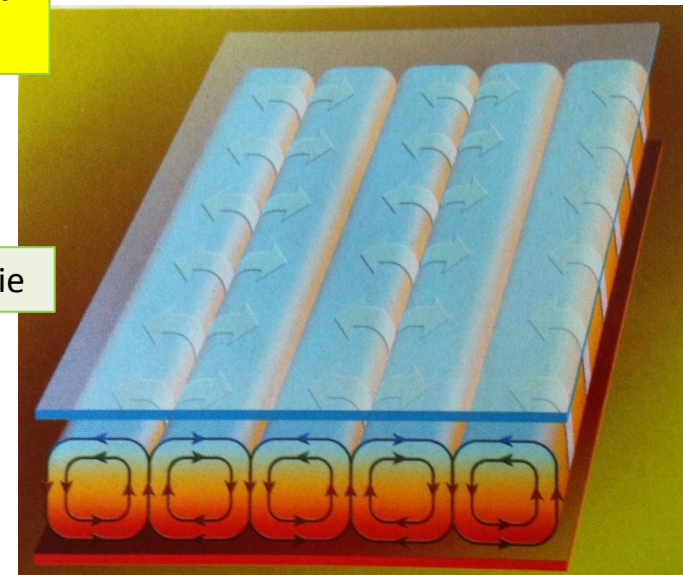
Fluctuations qui auraient été lissées par le « principe d'ordre »
Et qui au contraire se sont développées et stabilisées $\leftarrow$ grad T°

Bénard: ex type de « structure dissipative » qui associe:
l'ordre et le désordre/gaspillage

Ex: La vie

La dissipation de matière et d'Eie – généralement = perte de Rdmt% et
Évolution vers désordre $\rightarrow$ ici, loin de l'équilibre = source d'ordre

Déclinaisons $\rightarrow$ Chimie $\rightarrow$ Biologie moléculaire

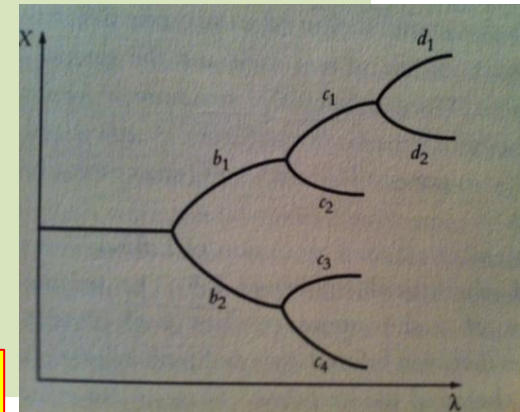
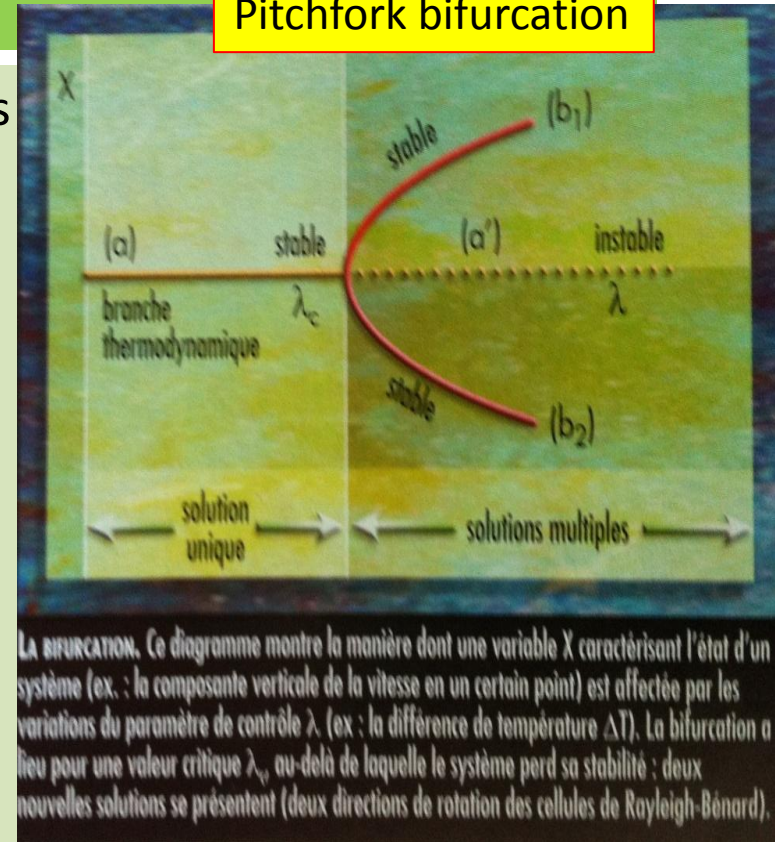


Loin de l'équilibre $\rightarrow$ proba (base du principe d'org) perd sa validité

Un peu de Thermo-3

- Chimie = Réactions généralement non-linéaires
 - Ex: $A \rightleftharpoons X \rightleftharpoons F$ à l'équil A/F bien défini et maximise entropie si syst isolé
 - Si on $\nearrow$ Concentration en A quid de X
 - Ds un 1^{er} temps on suit la « branche thermo »
→ devient instable: bifurcation
 - Après le point de bifurc : → « structures dissipatives »
 - Soit des oscillations chimiques
 - Soit des structures spatiales de non-equil
 - Soit des vagues chimiques
- Belousov-Zhabotinsky (1958) :
 - Oscillation chimique bleu-rouge-bleu....
 - Milliards de M² de molécule s'ordonnent !!
 - PRIGO: « La matière à l'équilibre est aveugle , elle commence à voir loin de l'équil. » :
 - Proche de l'équil → peu de dissipation car entropie min
 - Loin de l'équil bcp de dissipation car entropie >>

Pitchfork bifurcation



<http://www.youtube.com/watch?v=IBa4kgXI4Cg&feature=fvwrel>

Un peu de Thermo-4

A **Belousov–Zhabotinsky reaction**, or **BZ reaction**, is one of a class of reactions that serve as a classical example of [non-equilibrium thermodynamics](#), resulting in the establishment of a [nonlinear chemical oscillator](#). The reactions are theoretically important in that they show that chemical reactions do not have to be dominated by [equilibrium thermodynamic](#) behavior. These reactions are far from equilibrium and remain so for a significant length of time. In this sense, they provide an interesting chemical model of nonequilibrium biological phenomena, and the mathematical models of the BZ reactions themselves are of theoretical interest.

Dès lors qu'on a des structures dissipatives → on peut parler d'auto-organisation

- A l'œuvre en Biologie moléculaire :
 - qui va >> bien plus loin ds l'auto-org très au-delà de notre techno conventionnelle qui évite soigneusement la complexité
 - « La supériorité des syst auto-org est illustrée par la bio qui crée des produits avec précision sans précédent, efficacité et vitesse. »
- → On parle d'ordre par fluctuations
- → et on retrouve → Hasard et nécessité

Le syst « choisit » sous l'impulsion des fluctuations

- Déjà les Pre socratiques (-2500ans)
 - L'univers est –il régi par des
 - lois déterministes?
 - Quelle est la nature du temps?
- « Que serait le sens d'une liberté humaine ds un monde déterministe d'atomes »
 - « Dilemme d'Epicure »
- E. Kant, A.N. Whitehead, M. Heidegger : choix tragique à faire entre science aliénante et philos antiscientifique
- 18^{ème} siècle → N's « laws of nature » → Déterministes & réversibles
- 20^{ème} s → MQ (Schödinger, de Broglie, Heisenberg, Bohr, Einstein, ..)
 - À nouveau lois déterministes & réversibles

Conflit entre une science « time –rev » vs une philo « time-centered »

A quoi servirait une science qui ne pourrait inclure le temps comme aspect fondamental de notre existence ? :

Bergson, Popper, Nietzsche, Heidegger..

Retour à P□

- Résonance = transfert d'énergie entre deux mouvements périodiques couplés (fréquences entre elles dans rapport simple). Points de résonance → non-intégrabilité du système.
- L'existence de résonances dans les systèmes dynamiques à plus de deux corps ne suffit pas pour transformer la stabilité si volume reste petit : → les comportements périodiques, restent dominants.
- Grands systèmes (LPS) → la situation s'inverse: Les R s'accumulent dans EdP → dominant le mvmt → non périod-chaotiq.
- En MQ la « catastrophe » Poincaré se répète : contrairement à ce que présupposait la représentation quantique usuelle, les systèmes caractérisés par l'existence de telles résonances ne peuvent être décrits en termes de superposition de fonctions propres de l'opérateur hamiltonien.
- Dans le cas de la MC, il impliquait l'abandon de la notion de point et de loi d'évolution réversible qui lui correspond. Dans le cas MQ, il implique l'abandon de la fonction d'onde et de son évolution réversible dans l'espace de Hilbert.

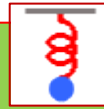
- En 1889, le mathématicien et physicien Henri Poincaré cherchait à répondre à la question de la stabilité du système solaire. Son mémoire intitulé « sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique » remporta le prix du concours ouvert à Stockholm par le roi Oscar II entre les mathématiciens du monde entier, apportant à Poincaré une notoriété internationale.

C'est l'instabilité qui crée l'irréversibilité.

Ce sont les résonances qui créent l'instabilité et la non-intégrabilité

Prigo: « Dans les deux cas, cet abandon a la même signification : il nous permet de déchiffrer le message de l'entropie. »

Retour à $P \square$

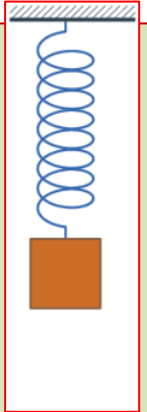


$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Un syst dyn. n'est pas forcément intégrable
 - En fait généralement pas !!
 - Et heureusement
- Car sinon: pas de flèche du temps $\rightarrow$ pas d'auto-org $\rightarrow$ pas d'évolution (vie)
- Pourquoi pas intégrables ?
 - Résonances $\leftarrow$ fréquences du mvmt et harmoniques
 - Ex de l'oscillateur harmo : $\rightarrow$ oscille à f propre
 - Ex de la balançoire : une poussée en phase très légère $\rightarrow$ résonance e
 - Si 2 f ou + $\rightarrow$ apparition de termes en $n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2$ et de $1/(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2) \rightarrow$ petits dénominateurs
 - Résonance à $\omega_1 / \omega_2 = n_2 / n_1 \rightarrow$ syst diverge
- Cette « frustration » (Max Born) est en fait une opportunité qui permet de « revisiter » la Phys.C.

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$



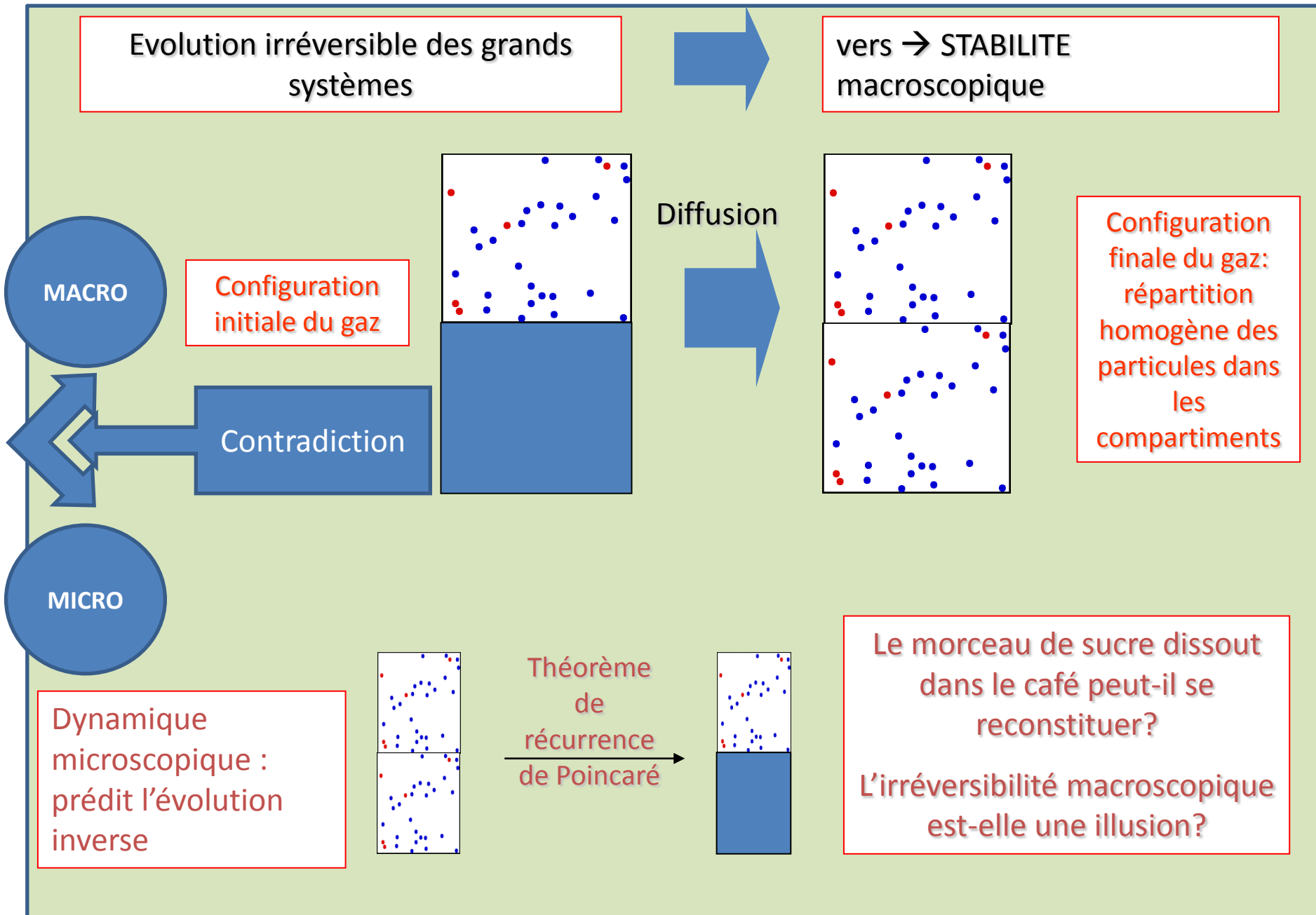
$$f = \omega_0 / 2\pi$$

L'autre point de $P \square$: théorème de la récurrence énoncé plus tôt :

Qq soit sa position initiale , au bout d'un temps non $\infty \rightarrow$ le système reviendra dessus
En pratique échelles de temps telles que temps de retour $\sim \infty$ voir urnes d'Erhenfest

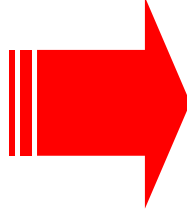
* Non $\infty = \infty$ pratique-réel

Succès du hasard subjectif et contradictions des approches macro- microscopique



Comment lever la contradiction?

Argument de Poincaré: le temps de retour augmente très vite avec la taille du système et donc l'évolution prédite n'est pas « observable »



Irréversibilité = illusion « pratique » ?

Le monde reste-t-il déterministe et réversible: la machinerie cosmique obéit-elle à la mécanique bien huilée de N qui laisse peu de place à l'incertitude?

Conséquences si oui: Tout hasard est subjectif et la réduction de la Thermodynamique (Boltzmann) à la Mécanique est illusoire

Mais d'autres découvertes vont ébranler ces certitudes → en fait réponse: NON

* Mouvement brownien (R. Brown, 1827) : décrit par A. Einstein (1905) puis Langevin (dynamique non déterministe). Justification microscopique de la diffusion. Modèle simple: marche aléatoire

* Poincaré (début XX^{ème} siècle) découvre l'instabilité et l'imprédictibilité (non calculabilité) dans des systèmes simples (3 corps)

* Et la Physique Quantique...

D'un comportement
Aléatoire émergent
De nouvelles
Propriétés

Imprédictibilité
est intrinsèque et
de règle en majorité

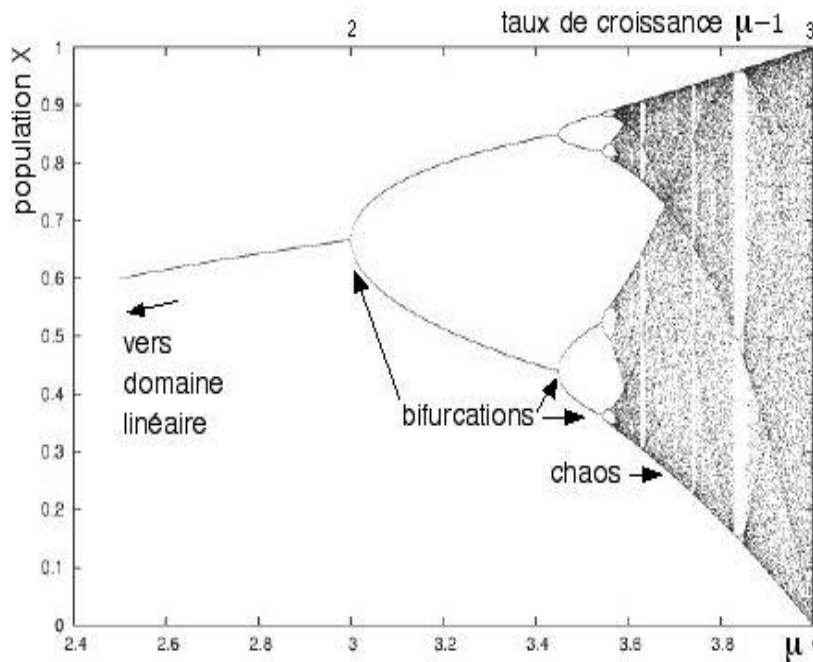
La nature elle-même est probabiliste
Indéterminée et indéterministe

• Retour à $P \square$ et synthèse

Les découvertes de Poincaré au début du XXème siècle portent les germes d'un renouvellement de la dynamique: aboutissent à la théorie du Chaos (années 50/60)

Les systèmes instables découverts par Poincaré (Pb à 3 corps) ne sont pas l'exception mais la règle (les systèmes prédictibles sont exceptionnels!!): ils sont imprédictibles (non calculables)

La source de l'imprédictibilité est inhérente aux systèmes: Le démon de Laplace est impuissant!!



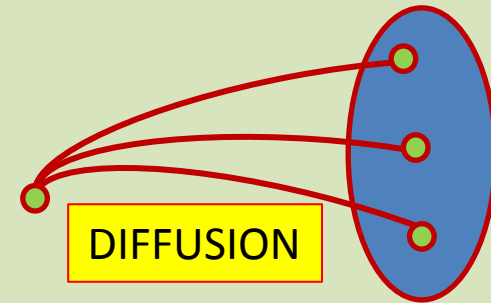
Dans ce domaine, la description probabiliste est nécessaire: Apparition d'un hasard objectif (dans un système déterministe)!

L'instabilité invalide la description de l'évolution en termes de « trajectoires » (au sens généralisé) au profit de la description probabiliste qui, seule, est déterministe: la probabilité n'est plus la mesure de notre ignorance!

Dans le cas stable (rare), les deux descriptions sont équivalentes.

Après P□

- Après P□ → L'école russe: KAM theory (Kolmogorov, Arnold, Moser)
 - 1962 : Point de départ de la mécanique dynamique
 - dans certaines C.I. particulières → stabilité « torique »: mouvements quasi périodiques et perturbations suffisamment petites ne peuvent éloigner durablement la planète de sa trajectoire
 - Au-delà (« perturb persistantes ») l'effet des résonnances est encore plus fort:
 - Ne peuvent être prises en compte par MC-N
 - car impliquent description non-locale
 - Même si po très précis → résultat aléatoire
 - Conduisent à → phéno de Diffusion
- 1998 Sussman & Wisdom
 - Pluton instable sur ordi → chaos possible
 - Divergence expon = les perturbations ne s'ajoutent pas mais se multiplient par 3 par 20 M d'années → $S/400$ → incertitude $3^{20} = 3,5M^2cm = 35Mkm$!
- J.LASKAR s/syst solaire
 - Comment les perturb se croisent au lieu de s'ajouter :
 - Rétroactions entre 2 trajectoires ↔ résonnances
 - Ex Saturne et Jupiter  Soleil en périodes 2/5 → se retrouve régulièrement en positions de conjonction de forces dans le même sens → susceptibles de modifier leur trajectoire → 200M d'années

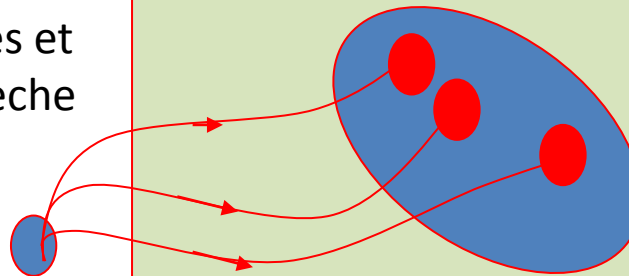


Après P□

Dans les grands systèmes (prototypes des systèmes thermodynamiques), ces résonances remplissent de façon très dense l'espace des états: les trajectoires s'effacent complètement!

L'évolution du système prend alors la forme d'un processus de diffusion (mouvement brownien): C'est-à-dire une dispersion uniforme des états et entropie croissante !!!

C'est ce processus qui rend intrinsèquement irréversible l'évolution des grands systèmes et explique l'émergence d'une flèche du temps à l'échelle macroscopique...



La description probabiliste devient seule possible et nécessaire

L'irréversibilité n'est pas une illusion!
Les probabilités deviennent un élément de réalité

L'instabilité de la dynamique microscopique donne naissance à travers les résonances, à un hasard objectif, reflet d'une description statistique irréductible à l'ancien idéal de description du monde en termes de trajectoires individuelles.

PRIGO et le temps qui passe: un peu de cerveau gauche

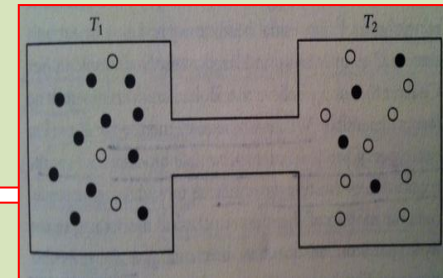
- 50+ ans 1^{er} papier sur IRR
 - 1^{ère} sur « auto-org » $\leftrightarrow$ distance à l'équil
 - Accueil < 0 d'un coté
 - N a déjà répondu
 - E pense que « le temps (IRREV) est une illusion »
 - Lagrange 1796 = 4 dim géométrie
 - Et même Hawkins $\rightarrow$ it
 - De l'autre: une interrog philo
 - Bergson (N 1930) = « le temps est une invention et rien d'autre »
 - Whitehead
 - M.Heidegger
 - Eddington
 - Depuis les pré-socratiques pas de pont entre les 2

Le temps « au delà de N et E » $\rightarrow$ relève de la métaphysique

Un « circulez, ya rien à voir »
auquel Prigogine se refuse

Position de Prigogine-1

1. Les lois Phys formulées de façon REV traduisent un monde STBLE-IDEAL-REV-FIGE
Alors que le réel est INSTABLE-EVOLUTIF-IRREV
2. L'IRREV conduite à la fois au désordre mais aussi à l'ordre : on parle d'auto-org et c'est m^{me} une org très supérieure (biologie)
 - l'entropie produite par un flux de chaleur irrev conduit à un un process structurant
 - ex du flux de chaleur qui → équilibre de composition entre 2 compartiments
3. La vie elle-m n'aurait pu apparaitre ...



1. Les syst IRREV sont aussi réels que les REV décrits par la Phys trad
2. Ils sont même infiniment plus nombreux et ne correspondent pas à une approx des lois de base
3. Ils jouent un role cle ds la nature

Quelque soit le passé on est en présence de 2 types de phenos:

REV

succès largmt démontré

IRREV

existence évidente

Comment réconcilier les 2
En conservant les acquis

Parallèle frappant:

→ Les succès de la thermo « à l'équil » ont retardé la découverte de nouvelles propriétés de la matière ds situations de non-équil.

→ De même le succès de la méca-N et des traject a empêché son extension au niveau stat permettant la prise en compte de la « FdT »

Position de Prigogine-2

- A la base de toute théorie : domaine de validité
- Point clé: à partir de quelle limite le STABLE $\rightarrow$ INSTABLE
- Des lors qu'INST $\rightarrow$ trajectoire n'a plus de sens: introduire des probabilités

La certitude $\rightarrow$ probabilité

Il s'ensuit 2 niv de description :

- Trajectoires = niveau individuel
- Probabilités = niveau statistique

Ces 2 niv sont-ils équivalents ?

Oui, si STABLE

Non, si INST

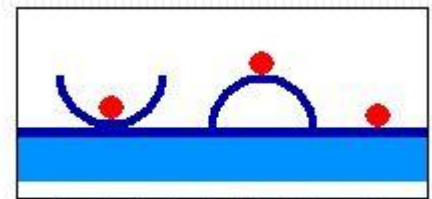
- C'est pourquoi l'approche proba/stat est la seule permettant prise en compte caract IRR
 - Boltzmann l'avait bien compris ds sa « théorie cinétique des gaz »
 - En passant de la dyn-N à la thermo $\rightarrow$ émergence de concepts probabilistes
 - On parle de « Physique des populations »

PRIGO: « Les comportements dynamiques chaotiques permettent de construire ce pont, que Boltzmann n'avait pu créer, entre la dynamique et le monde des processus irréversibles. La nouvelle représentation de l'objet dynamique, non locale et à symétrie temporelle brisée, n'est pas une description approximative, plus pauvre que la représentation classique. Elle définit au contraire cette représentation classique comme relative à un cas particulier. »

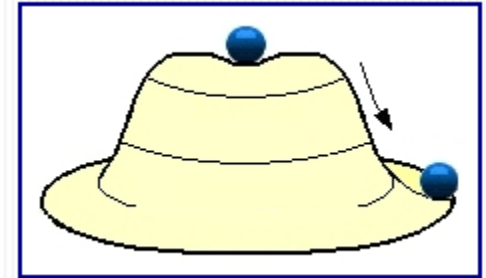
Comment passer à une description stat des choses ?

Retour sur la clé du pb : STABILITE -INSTABILITE

- Stable= un chgmt faible des conditions initiales $\rightarrow$ pas d'effet
- Instable = un chgmt faible $\rightarrow$ effets importants voire considérable
- Syst chaotique : trajectoires divergent exponentiellement avec le temps
précision des cond initiales (seule une précision $\propto$ pourrait conduire à une trajectoire idéalisée) : on ne peut lancer 2 dés de la même façon ou u face...
- Chaos déterministe : les équations sont parfaitement déterministes mais le résultat est « imprévisible »
- L'incalculabilité des 3 corps n'est pas un manque de puissance d'analyse ou de calcul mais elle est « intrinsèque »

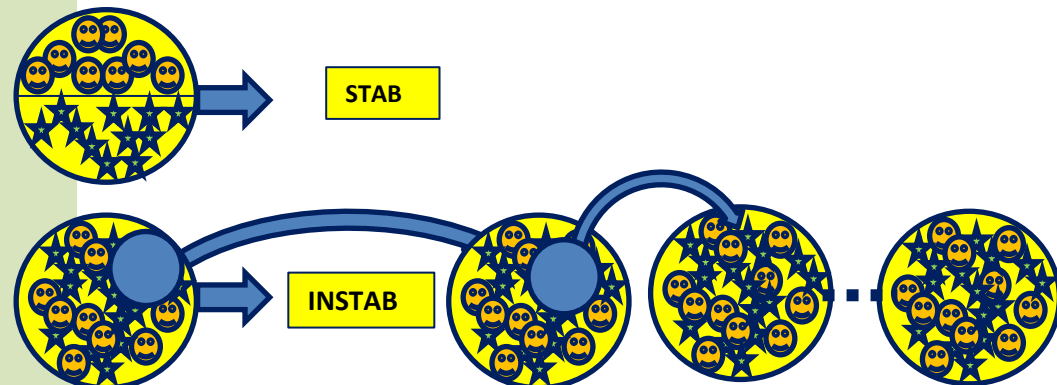


Les trois états d'équilibre. De gauche à droite, l'équilibre stable, instable et indifférent.

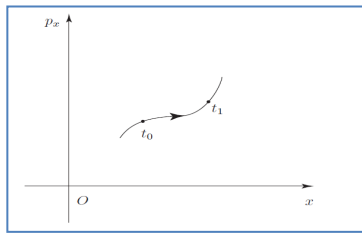


STAB-INSTAB autre exemple avec populations

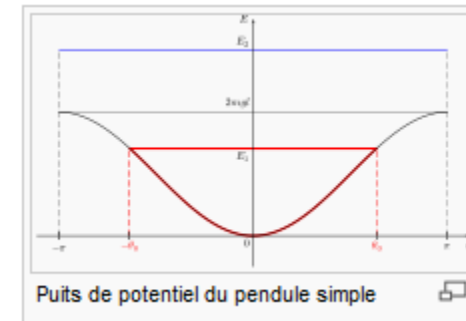
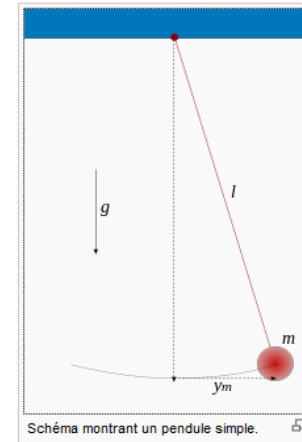
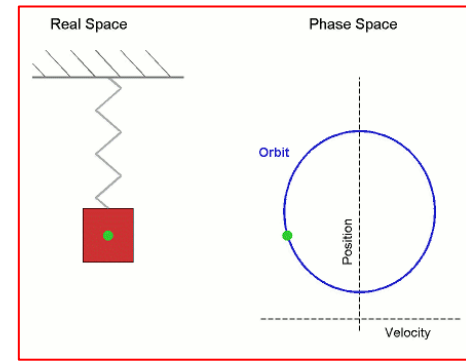
- Aussi loin que l'on aille les   sont « imbriqués » (fractal)
- Extrême dépendance aux conditions initiales:
 - Il faudrait une précision $\propto$ $\rightarrow$ pour mouvement déterministe
 - À défaut $\rightarrow$ mouvement indéterminé : résultat probabiliste
 - Rupture de symétrie du temps



Comment approcher le pb?

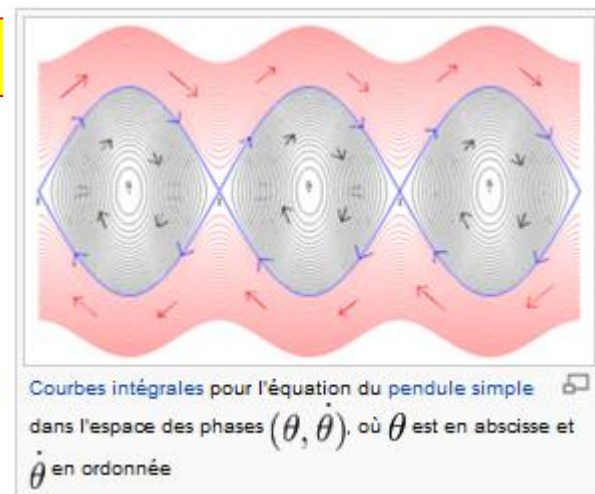
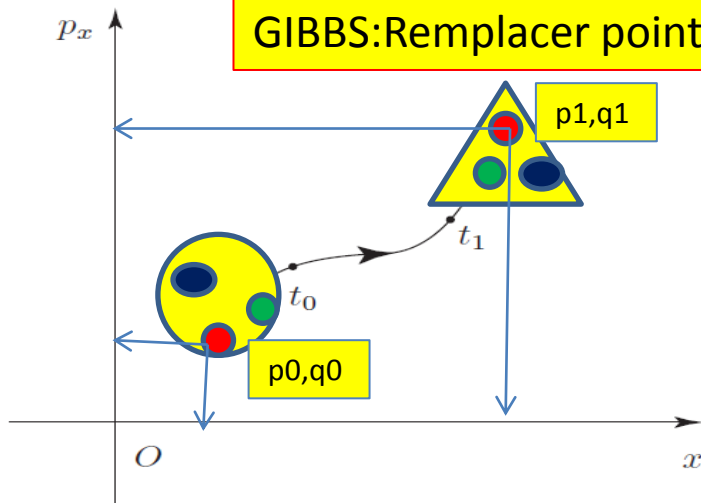


Parenthèse : espace des phases, ensembles de Gibbs, proba et densité de proba



- Comment représenter les états successifs d'un syst? → EdP
- EdP=Etat du syst = un point ds un diag $x, p = mv$, ou q, q°
- Concrètement, dans l'exemple d'un gaz constitué de N particules, l'espace des phases sera à $6N$ dimensions. On aura $3N$ coordonnées de position et $3N$ coordonnées de quantité de mouvement. ($N=10^{23}$)
- Ces coordonnées sont dites généralisées car elles peuvent correspondre à différents systèmes de coordonnées cartésiennes, sphériques, hyperboliques etc...
- Gibbs « statistical mechanics » :
 - ensemble ds l'EdP=nuage
 - Remplacer le point-math inaccessible par un nuage/cloud + proba
 - $\rho(p, q, t)$ = prob à t de trouver un point ds le voisinage q, p

GIBBS: Remplacer point par nuage de points+proba



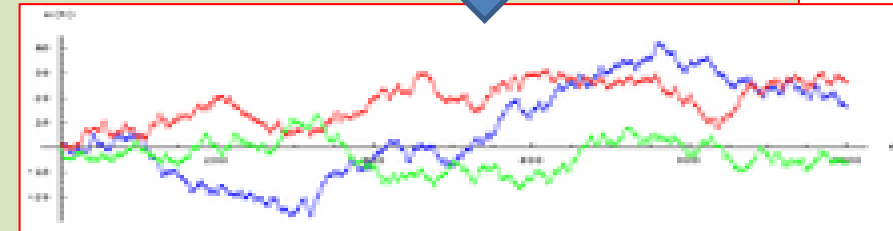
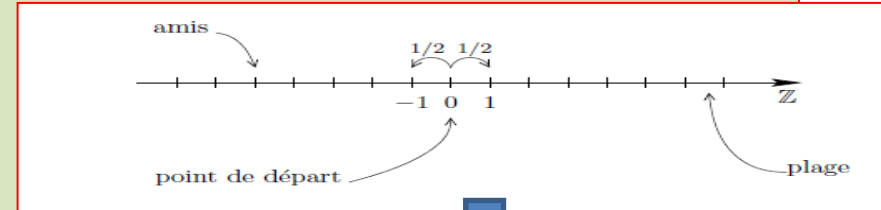
Comment passer à une description statistique des choses ?

Retour s/ qq fondamentaux : hasard et probabilité

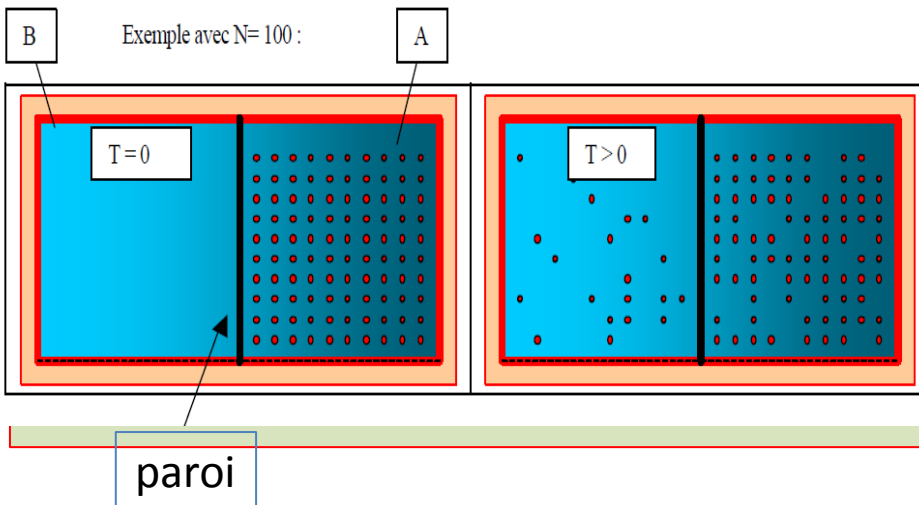
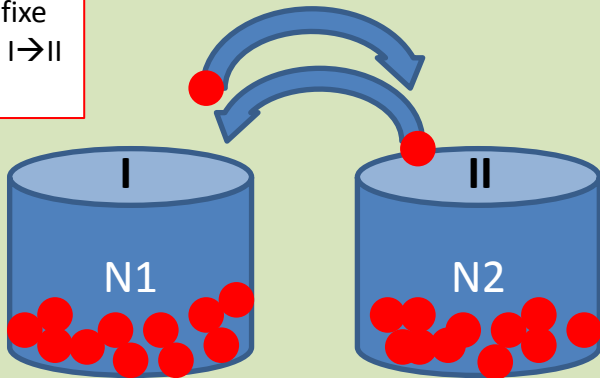
- Il existe des process déterminés qui produisent de l'indetermination laquelle peut conduire à stab-stat

– Qq ex :

- La marche de l'h-saoul
- Les urnes d'Ehrenfest

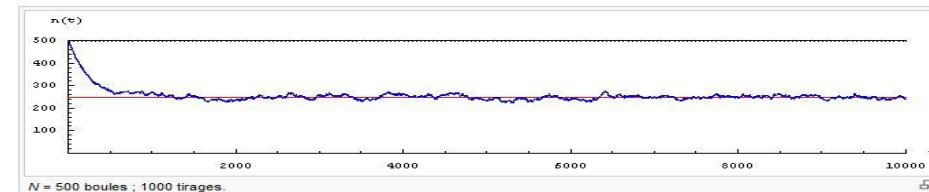
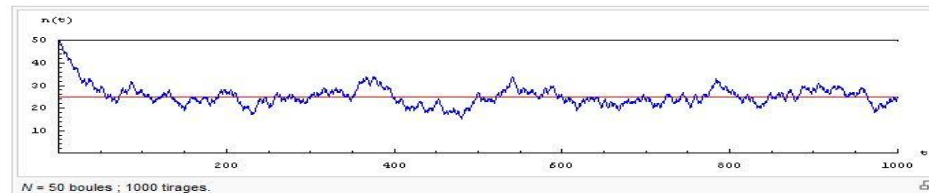
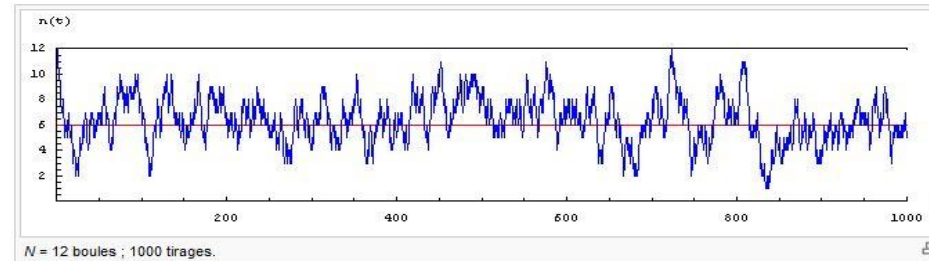
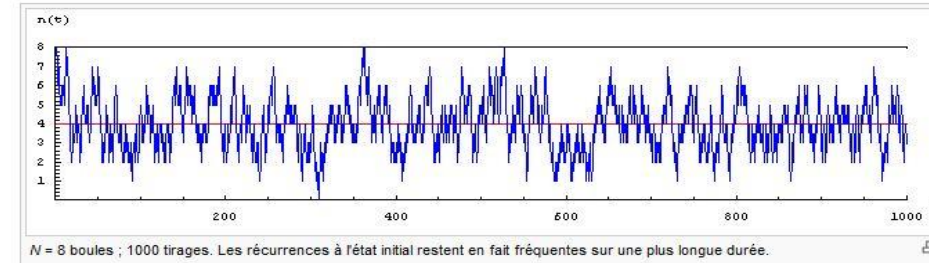
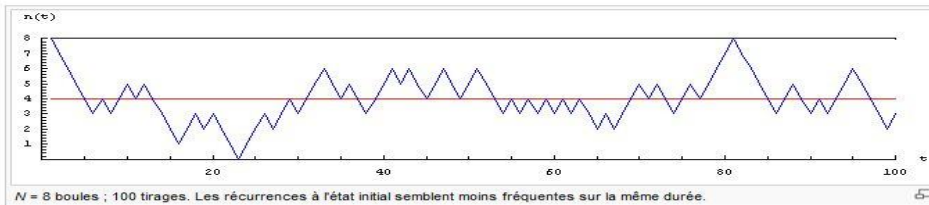
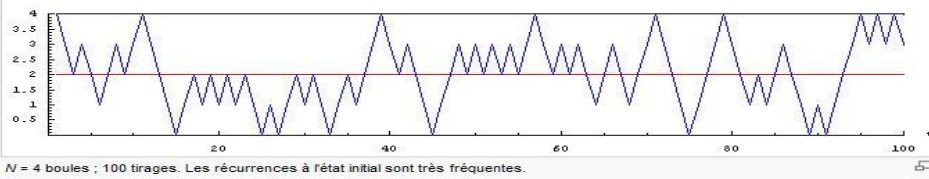


À interval fixe
Au hasard $I \rightarrow II$
ou $II \rightarrow I$



Urnes d'Ehrenfest

- Analyse
- IRREV
 - Evolution irrev vers équilibre autour de $N/2$
 - D'autant plus stable que nbre part élevé
 - Par contre si N très faible $\rightarrow$ imprevis/REV
 - Il faut donc un gd nbre de part $\rightarrow$ IRREV
- Entropie flèche du temps
 - L'urne se stabilise spontanmt ds etat plus désordonné que initial
 - Pour le mesurer : entropie stat =
 - $S = k \log N P = \text{prop à log des complexions}$
 - Plus il y a de façon d'arriver à une répartition plus elle est probable $\rightarrow N/2$
 - $N = N_1 + N_2 \rightarrow P(N_1, N_2) = N! / N_1! N_2!$
 - $P(8, 0) = 1 \rightarrow S = 0$
 - $P(2, 2) = 6$
 - $P(4, 4) = 70$
 - $S = k \log 70 \gg \rightarrow \text{stabilité} = dS = 0, S \text{ max}$
- Temps de retour
 - Poincaré
 - Ici $T = 2 \exp N$
 - En situation macro $N \sim 10^{23}$
 - $T \gg \text{age de l'univers}$
 - C'est pas exclu ...mais pratiqt impossible
 - L'IRR apparente n'est due qu'à la diff. d'échelles de temps (obs-pheno)
- Conclusion:
 - ds les situat. macro usuelles $\rightarrow$ Urnes IRREV



Hasard

- 3 types de hasards
 - Intrinsèque $\rightarrow$ MQ (décomposition nucléaire)
 - Rien à faire c'est comme ça....
 - Manque d'info $\rightarrow \exists$ variables cachées
 - Allumer la lumière...
 - Phénos qui « fabriquent du hasard » : dés, pile-face,..
 - Impossibilité de reproduire des C.I. à l'identique (précis $\propto$)
 - On les utilisent à cet effet...

Hasard et Chaos $\rightarrow$ théorie de CHAOS

La théorie du chaos est une véritable [théorie](#) scientifique. Elle repose sur la représentation des solutions des équations différentielles dans l'espace des phases associé : représenter les solutions sous forme de trajectoire dans l'espace plutôt que l'une des variables en fonction du temps permet de révéler la structure sous-jacente : c'est ce qui conduit à affirmer que la théorie du chaos contribue à «trouver de l'ordre caché sous un désordre apparent.»

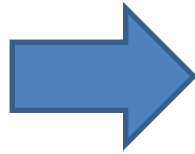
Mais ce nouvel ordre est très différent de l'ordre ancien : au déterminisme implacable d'une dynamique intégrable quasi-périodique a succédé une description de nature fondamentalement [probabiliste](#), caractérisée par l'existence d'invariants prenant la forme de [mesures](#) de probabilités, d'[attracteurs](#), de [dimension fractale](#)... Toutes les [sciences](#), y compris [sociales](#), sont concernées par ce changement de paradigme.



Nouvelle branche de la phys: l'étude des systèmes dynamiques

Un peu de théorie du CHAOS (pour les crvx-droits)-1

Retour aux urnes (!)



Urnes → qq soit le pt de départ → Stab statist
De cette descrip stat se déduit l'IRREV
Comment passer des traject → description stat ?

- Quelques outils
 - Espace des phases (voir annexe)
 - Espace Euclidien → Espace de Hilbert
 - Et au delà...
 - Représentation de l'évolut du syst à travers des graphes (maps)
où les états se succèdent par incr discret du temps : étude en pas à pas :
 - $t_0 \rightarrow t_1 = t_0 + \text{pas} \rightarrow t_2 = t_1 + \text{pas} \rightarrow \dots$ Ex pas = 1 sec
 - Généralisation des Opérateurs Op, eigen-f, eigen-v
 - Fcts généralisées , distribution
 - en part fct de DIRAC : $\delta(x-a) = 0$ sauf en $x=a$ (voir annexe)
 - Remplacement de la traj par une fct de proba/densité de proba
 - Si ρ = fct de distrib on cherche un Op U tel que
 - $\rho_{n+1}(x) = U\rho_n(x)$
 - Ou $X_n \rightarrow X_{n+1}$ après 1 pas
 - Cas part de la traject $\rightarrow \delta(X-X_{n+1}) = U \delta(X-X_n)$
 - Partitionnmt = découper l'espace en cases et observer les occurrences ds les cases → approximer densité de prob
 - La val moy ds le temps = moyenne des cases

Un peu de théorie du CHAOS -2

- Qq graphes (maps) pour illustrer concrètement le pb

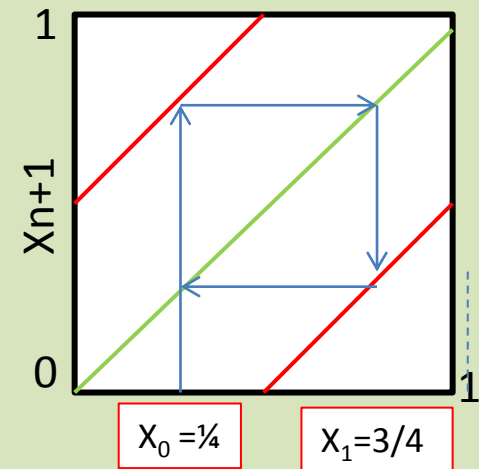
Ex-1 : graphe périodiq non chaotiq :

Loi du mvmt : $X_{n+1} = X_n + 1/2 \pmod{1}$

$X_0 = 1/4 \rightarrow 3/4 \rightarrow 1/4 \dots \rightarrow$ période STABLE

Y-a-il d'autres solutions ? Non

Traject et statist se confondent



Ex-2 Graphe chaotique :

Bernoulli Map- Bernouilli shift :

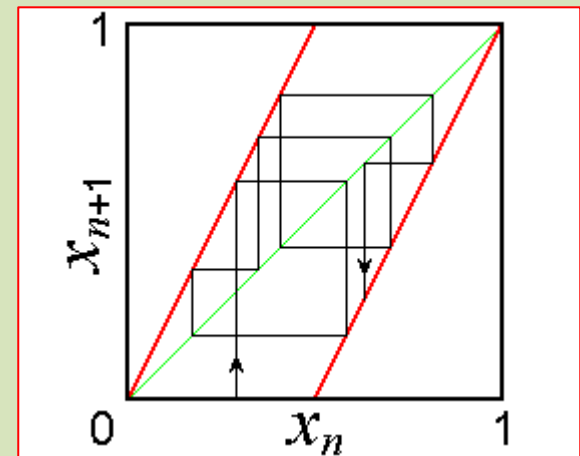
Loi du mvmt $\rightarrow X_{n+1} = 2X_n \pmod{1}$

Instable $\rightarrow$ chaos

Traj et stat très différentes :

Traj $\rightarrow$ imprévisible – instable

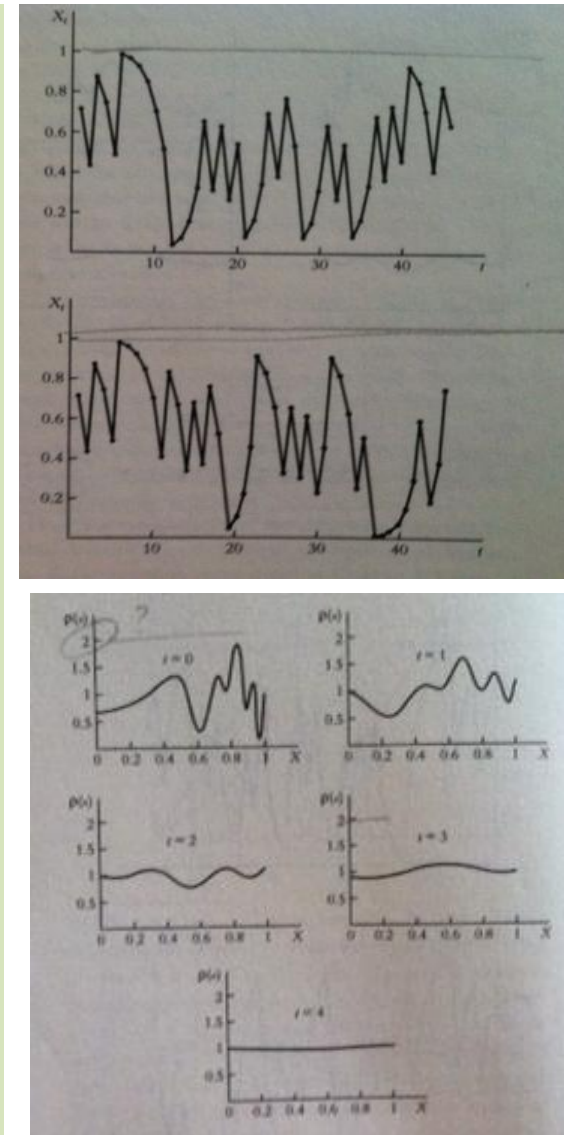
Stat $\rightarrow$ stable



Un peu de théorie du CHAOS-3

- 1^{ère} constation = « ça part ds tous les sens.. »
 - En partant de 2 points extrmt proche → divergence imprév
- Le déterminé → de l'indéterminé = on parle de « chaos déterministe »
- La distance entre $T \nearrow$ expon't = $2^n = e^{n \log 2}$
 - N steps discret → continu → $e^{(t\lambda)}$ avec $\lambda = \lambda \log 2 = 0.69$
 - exposant de LIAPOUNOV : mesure de la divergence chaotique
- Qu'en est-il au niv prob-statist :
 - Soit $p(x)$ prob-ditrib : on cherche U tel que $p_{n+1}(x) = U p_n(x)$
 - Voir courbes à $t=0, t=1, t=2 \dots t=4$ → déjà lissée uniforme
 - L'instability des traject → stability statist
- Qu'en est-il des traject classiques ?
 - Cas part de la dist et sont décrites par U
 - $\delta(X-X_{n+1}) = U \delta(X-X_n)$

Si $\lambda > 0 \rightarrow$ CHAOS



La description en termes de distrib est bien +RICHE et incorpore en « cas particuliers » les traject tradit. »

0.1245 =
 $1 \times 10^{-1} = 0.1$
 $2 \times 10^{-2} = 0.02$
 $4 \times 10^{-3} = 0.004$
 $5 \times 10^{-4} = 0.0005$

• Pourquoi « Bernoulli shift » ?

$$a_i = 0 \text{ ou } 1 \rightarrow 1/2^i$$

- Exprimé en binaire $X_0 \rightarrow 0,011011001100110... = 0,a_0a_1a_2a_3....$
 $0,+a_01/2+a_11/2^2+a_21/8+a_31/2^4...a_{n1/2}^{n+1}$
- $X_1 = 2X_0 \pmod{1} \rightarrow X_1 \rightarrow 0,11011001100110.. = 0,a_{1/2}a_{2/4}a_{3/8}... \leftarrow \text{shift}$

• Périodicité-non périodicité

- Si X_0 rationnel $\rightarrow$ Périodique prévisible

- Ex $1/3 = 0,33333333...$
- $3/7 = 0.42857142857142857...$
- Tout rationnel $\rightarrow$ périodique

$$\frac{11}{24} \mapsto \frac{11}{12} \mapsto \frac{5}{6} \mapsto \frac{2}{3} \mapsto \frac{1}{3} \mapsto \frac{2}{3} \mapsto \frac{1}{3} \mapsto \dots,$$

- Si irrationnel $\rightarrow$ Chaotique non périodique

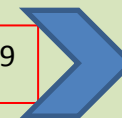
• Extrême sensibilité aux cond init

- $X_0 = 0,101.....110$
- $X'_0 = 0,101.....111$

U_{-40} différent



Différence = 2^{-39}



Diff = $1/2$
40 steps !!

• Le Bi-shift illustre bien la « flèche du temps »

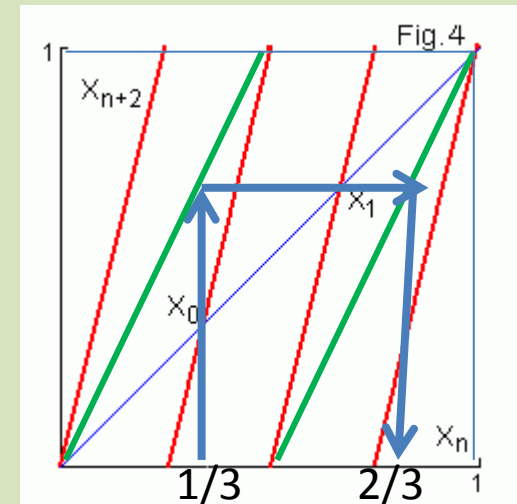
- Si $t \rightarrow -t$ alors $x_{n+1} = \frac{1}{2} x_n$ qui converge très rapidement sur 0 (attracteur point)
- Donc non réversible car,
- La symétrie du temps est bien détruite

Bernoulli shift suite *(pour crvx-de + en + droits)* CHAOS-5

- Valeur moy sur longue période :
 - $\langle \Phi(X) \rangle = 1/n \sum \Phi(X_j)$, OK mais si X_j pas calculable ? $\rightarrow$ car traj erratique
 - Remplacer par $\int dX \rho(X) \Phi(X)$ où ρ =densité de prob
 - Les 2 formulations sont-elles équivalentes ?
 - Oui si le syst est ergotique
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum \Phi(X_j) = \int dX \rho(X) \Phi(X)$

On remplace ainsi une moy sur très longue durée par une moy d'ensemble $\rightarrow$ moy statist.

- En pratique : Le partionnmt permet de le faire
- Back to B
 - Notion de Points fixes 0,1 $\rightarrow f(X)=X$
 - Si on applique B sur B $\rightarrow f(f(X))=f^2(X)=4X$ (pente 4)
 - Pts fixes= 0,1,1/3,2/3
 - Si $X_0=1/3 \rightarrow X_1=2/3 \rightarrow X_2=4/3=1/3$ flip-flop
 - $F_3(X)$ pente 8 = $1/5 \rightarrow 2/5 \rightarrow 4/5 \rightarrow 8/5=3/5 \rightarrow 6/5=1/5$
 - On a donc une ∞ d'orbites « INSTABLES » et « PERIOD ».
 - On perd de l'info = le shift supprime un digit à chaque fois
 - Donc non-REV = à un X_n donné corresp $2 X_{n-1}$
 - Pourquoi? Parceque la Map n'est pas linéaire $\rightarrow$ cette non-linearité $\rightarrow$ CHAOS

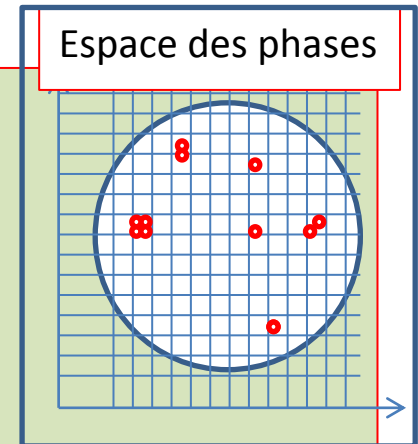
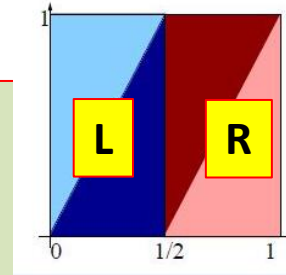


Bernoulli shift CHAOS-6

- Tout rationnel $\leftrightarrow$ orbite périodique-instable : $\propto^{\text{té}}$ d'orbites périod instables
- Tout irrationnel $\rightarrow$ suite sans fin , chaotique : encore $\ggg \propto^{\text{té}}$ d'orbites chaotiques qui remplissent tout l'espace(1,1) de façon dense et uniforme

- En pratique : Partitionnement :

- $\rightarrow$ histogrammes
 - $\rightarrow$ approximer la « densité de prob »
- Si 2 cases seulement L(0-0,5) & R(0,5-1)
- Supposons jeu pile-face $\leftrightarrow$ pile = L , face=R:
 - N tirages – suite de L et R:
LLRRLRRRLRLLRLLRLRLLLRLRRLLRRRL.....
 - Tirages totalmt aléatoires $\rightarrow$ qq soit le tirage il $\exists$ une cond initiale X_0 dont les itérations (complètement déterministes) vont répliquer très exactement le tirage (complètement aléatoire)



C'est alors que le hasard/probabilité rencontre la certitude/déterminisme !

Formulation probabiliste

Si ρ = fct de distrib on cherche un Op U tel que

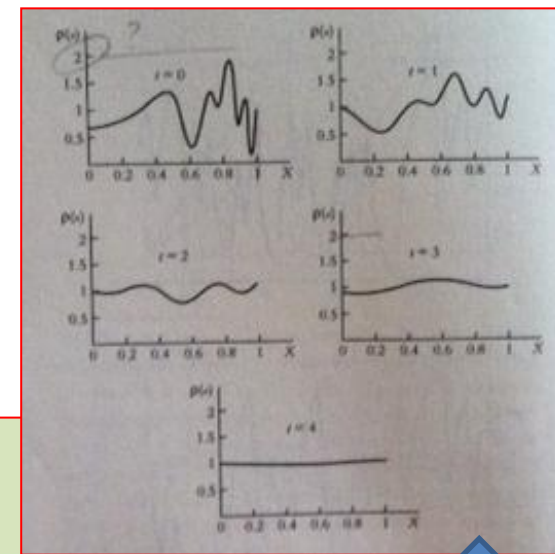
$$\rho_{n+1}(x) = U\rho_n(x)$$

Ou $X_n \rightarrow X_{n+1}$ après 1 pas

Cas part de la traject $\rightarrow \delta(X - X_{n+1}) = U \delta(X - X_n)$

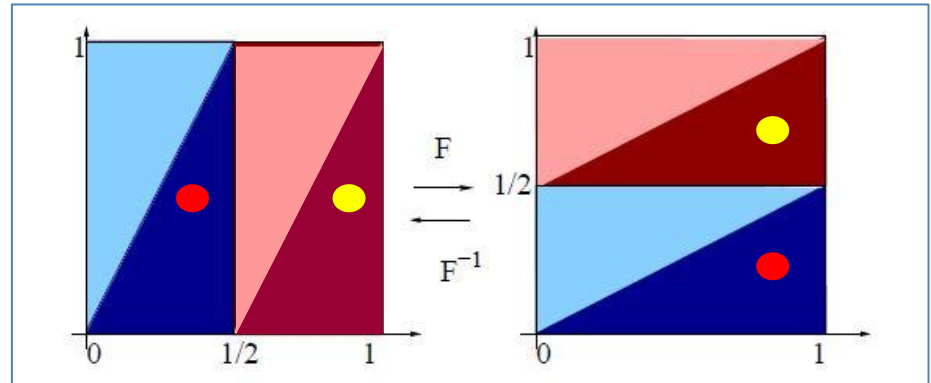
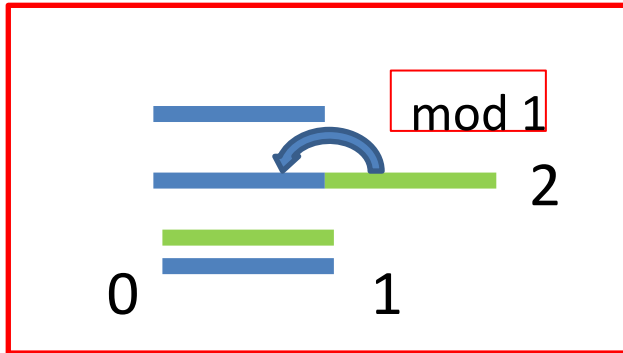
- OK, mais que vaut ρ et comment le trouver ?

- Eq de PERRON-Frobenius $\rho(x) = \int dy \delta(x - f(y)) \rho(y)$
 - Kernel = $\delta(x - f(y))$ singulier
 - 2 cond $\rightarrow \int dx \rho(x) = 1$ + $\rho(x)$ doit être ≥ 0
- Alors cette formule donne (2p de calcul), pour B-shift :
 $\rho_{n+1}(x) = 1/2(\rho_n(x/2) + \rho_n(x+1)/2)$ (trivial pour PRIGO!!)
- Il existe théorème: si une solution , elle est unique
 - Essai : $\rho(x) = 1 \rightarrow$ ça marche $\rightarrow$ c'est LA solution = ceci montre que le B-shift remplit complètement et uniformément son interval = l'ensemble de l'Intervalle est « attracteur »

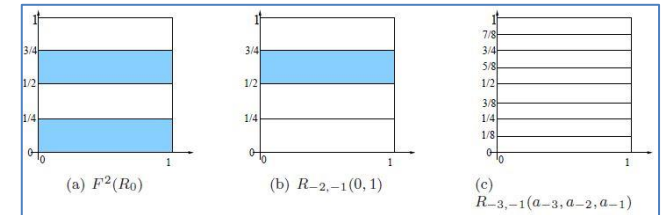


On retrouve les diag de $\rho(x)$ qui tendent très rapidement vers $\rho(x) = C'te = 1$

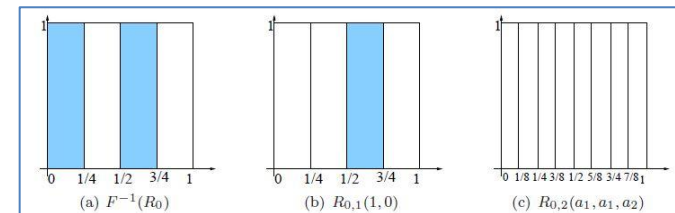
Autre ex = la transform. du boulanger (rien de manuel → tjrs pour les crvx-droits)-1



$$F(x, y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{y}{2}\right) & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \left(2x - 1, \frac{y+1}{2}\right) & \text{if } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$



$$F^{-1}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}, 2y\right) & \text{if } 0 \leq y < \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{x+1}{2}, 2y - 1\right) & \text{if } \frac{1}{2} \leq y < 1. \end{cases}$$



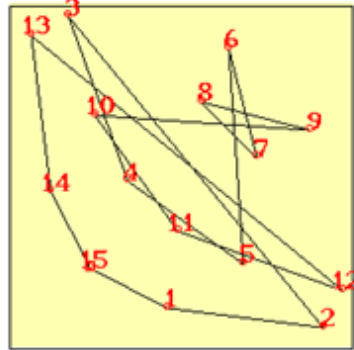
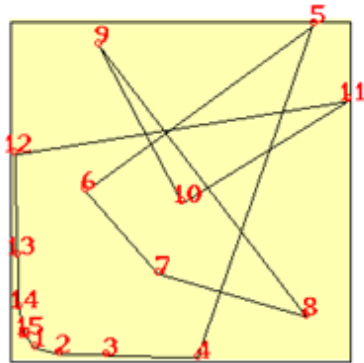
- Similarité avec le B-shift (1 var → 2 var) sauf Boulanger est REV (B-shift IRREV) : pourquoi ?
 - Les x se dilatent les y se contractent → Les surfaces sont préservées = pas de perte d'info
 - À un X_{n+1}, Y_{n+1} ne correspond qu'un X_n, Y_n → transfo INVERSE existe et fonctionne
 - $X_0 = 0.a_0a_1a_2a_3\dots, Y_0 = 0.b_0b_1b_2b_3\dots \rightarrow X_1 = 0.a_1a_2a_3\dots, Y_1 = 0.a_0b_1b_2b_3\dots \rightarrow$ transfert du digit d'info
- Bien que mécanisme d'obtention points successifs = parfaitement déterministe → CHAOS

Autre ex = la transform. du boulanger -2

La trajectoire d'un point par les itération successives de la transformation du boulanger :

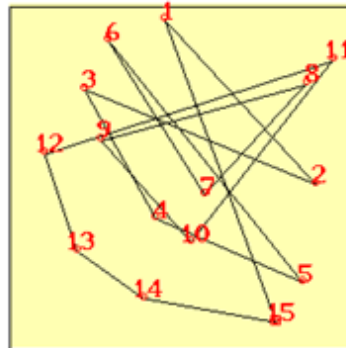
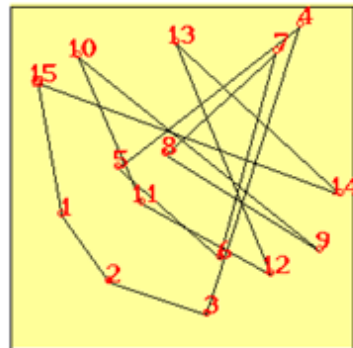
Le point [5,10]

Le point [30,30]



Le point [10,100]

Le point [100,10]



La traject indiv (1 point) et
Parfaitement déterminée



La transformation du boulanger se définit sur $[0, 1]^2$ de la façon suivante

$$S(x, y) = \left(2x, \frac{y}{2}\right) \quad \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$S(x, y) = \left(2x - 1, \frac{y+1}{2}\right) \quad \text{sinon.}$$



2 points très proches
sous l'effet dilatation-
compression ont des
orbites qui s'éloignent
exponentiellement en fct de
 λ exposant de Liapounov

Périodicité Boul-map -3

On retrouve le « cas particulier périodique »

- $X_{n+1} = 2X_n \mod 1$
- $Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n/2 & \text{si } X_n < 0.5 \\ Y_n/2 + \frac{1}{2} & \text{si } X_n > 0.5 \end{cases}$

• Ex :

- $X_0 = 6/10 = 0.6$

- $X_1 = 0.2$

- $X_2 = 0.4$

- $X_3 = 0.8$

- $X_4 = 0.6$

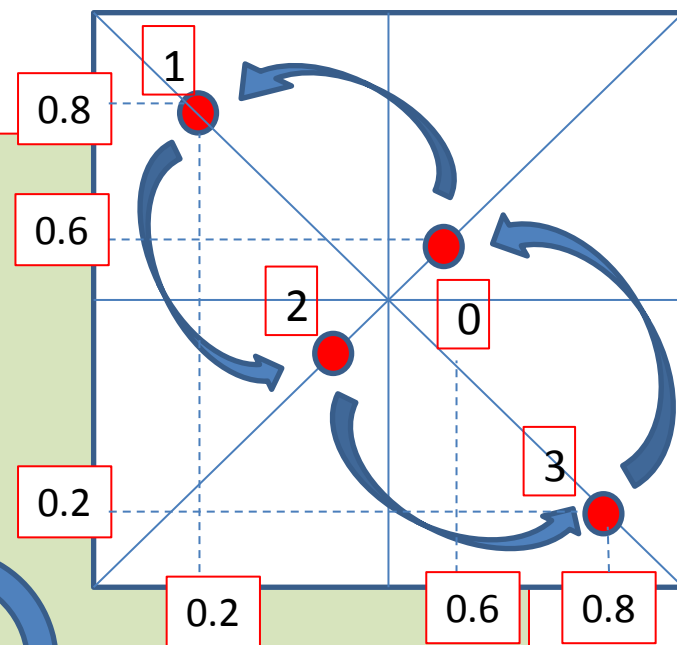
$$Y_0 = 6/10 = 0.6$$

$$Y_1 = 0.3 + 0 + 5 = 0.8$$

$$Y_2 = 0.4$$

$$Y_3 = 0.2$$

$$Y_4 = 0.1 + 0.5 = 0.6$$



$$1.5/7 = 0.2142857142857142857 \dots$$

$$3/7 = 0.42857142857142857 \dots$$

$$7/13 = 0.5384615384615384 \dots$$

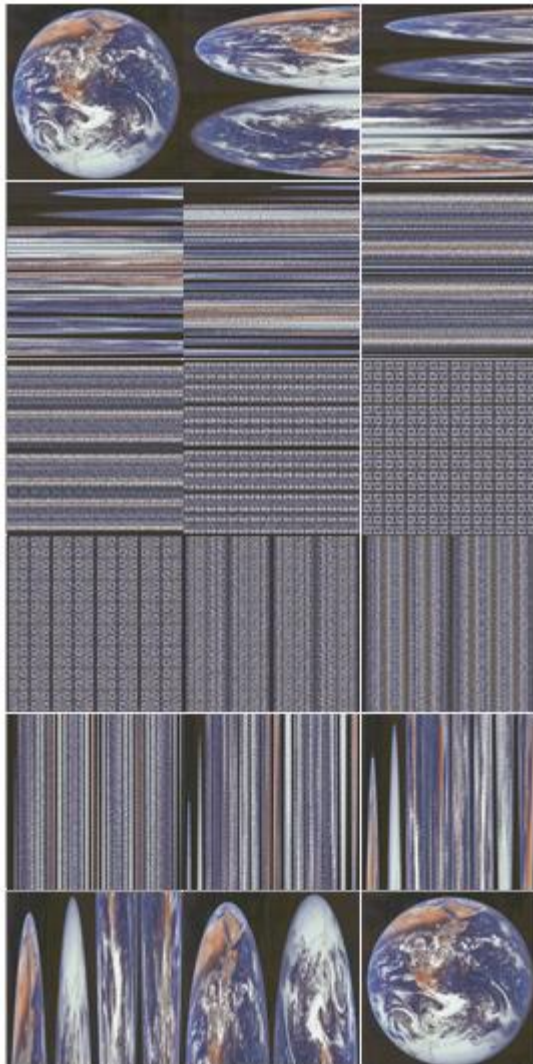
$$7/17 = 0.4117647058823529 \dots \text{ (à suivre)}$$

Le développement décimal d'un nombre irrationnel ne se répète jamais et ne se termine jamais. Le développement décimal d'un nombre rationnel se finit ou se répète.

Transformation du boulanger

La terre

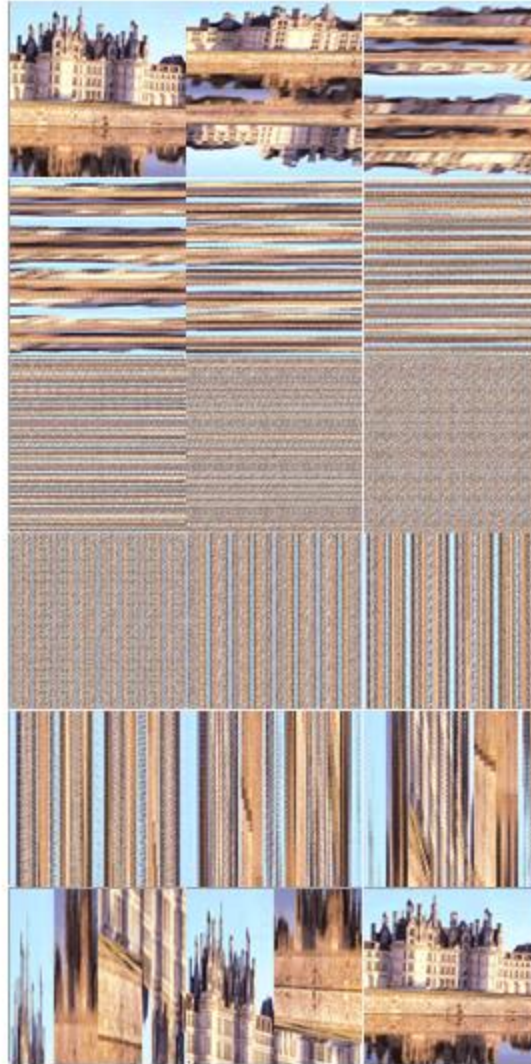
(Image 220x220, 17 Mgoes)



Transformation du boulanger

Chambord

(Image 220x220, 17 Mgoes)



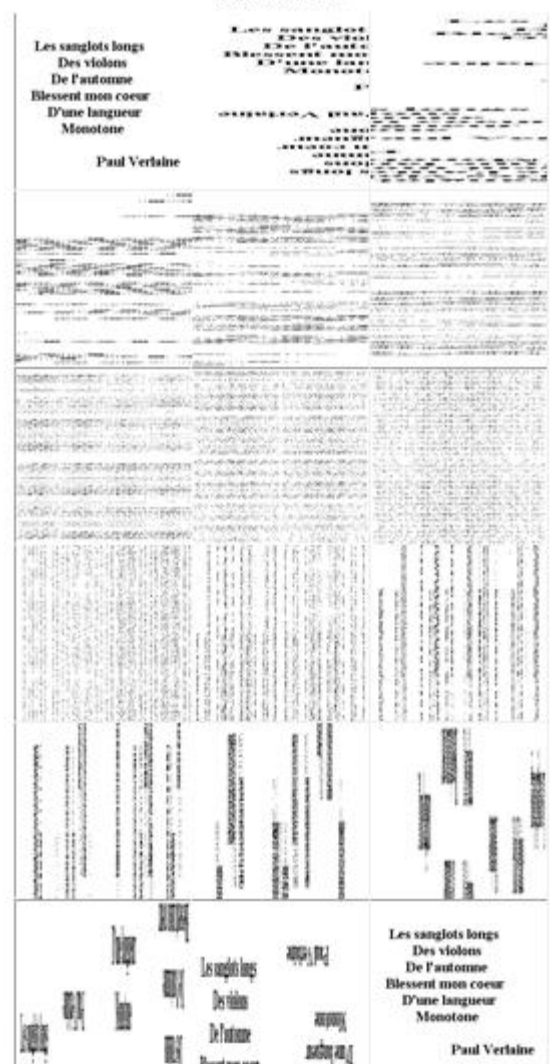
Transformation du boulanger

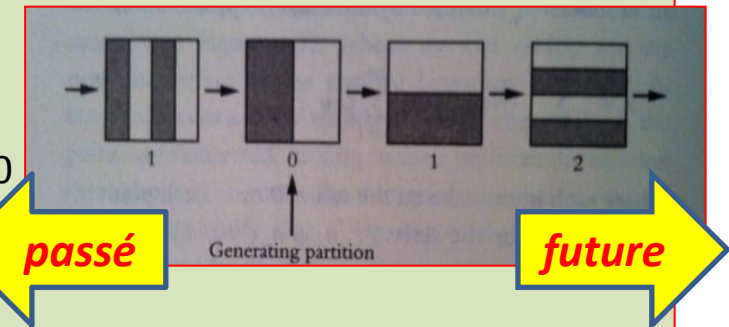
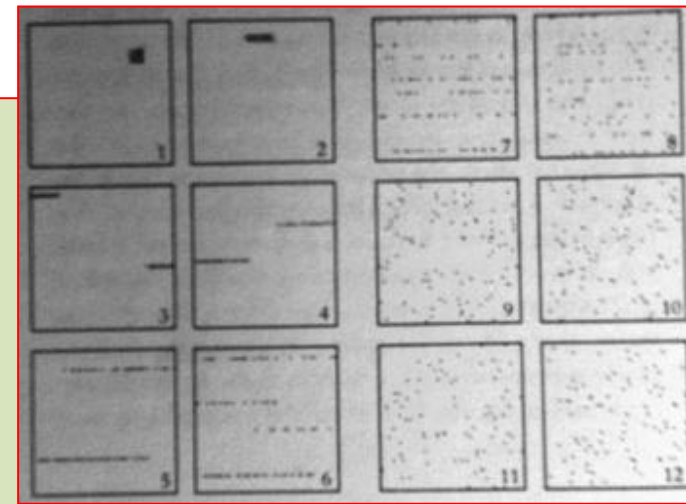
Un texte

(Image 220x220, 17 Mgoes)

Les sanglots longs
Des violons
De l'automne
Blessent mon cœur
D'une langueur
Monotone

Paul Verlaine



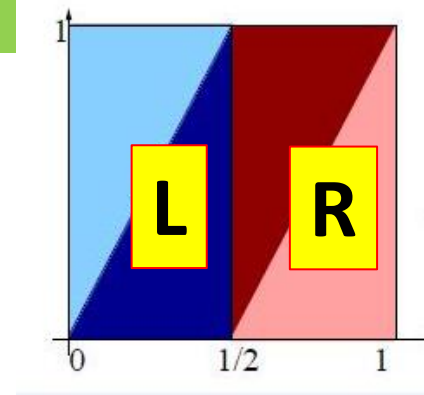


- Après qq itérations :
 - Espace entièrement couvert
 - de façon dense et uniforme
 - Distribut $\rightarrow$ vers c'te (id B-shft)
 - Sous forme de B-shft
 - $x = \sum_{-\infty}^{0} \frac{1}{2^{n+1}} U_n$
 - $y = \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} U_n$
 - $X = 2^{-\infty} U_{\infty} + 2^{-3} U_2 + 2^{-2} U_1 + 2^{-1} U_0$
 $Y = 2^{-1} U_1 + 2^{-2} U_2 + 2^{-3} U_3 + \dots$
 - En binaire:
 - $X_0 = 0.a_0 a_1 a_2 a_3 \dots a_i = 0 \text{ ou } 1$ $\rightarrow$ $X_1 = 0.a_1 a_2 a_3 \dots$
 - $Y_0 = 0.b_1 b_2 b_3 \dots$ $b_i = 0 \text{ ou } 1$ $\rightarrow$ $Y_1 = 0.a_0 b_1 b_2 b_3 \dots$
 - Complmt détermniste $\rightarrow$ « yet » CHAOTIQUE

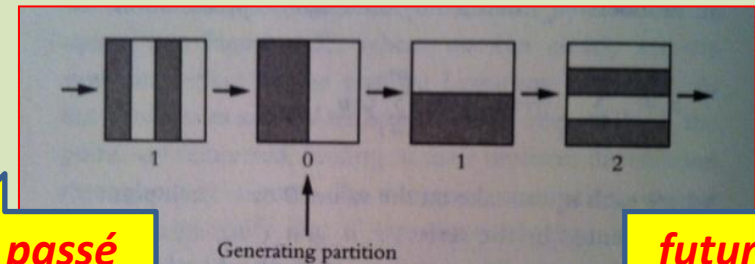
L'info de départ (qq soit, X_0, Y_0) contient tout le future mais aussi tout le passé de l'évolution

Transform. du boulanger -6

RAPPEL (B-shift) sur Partitionnmt à 2 cases seulmt L(0-0,5) & R(0,5-1) → pile-face → pile = L, face=R:
 LLLRRLRRRLRLLRLLRLRLRLLRLLRRRLRRRL.....Tirage totalmt aléatoire
 → qq soit le tirage il $\exists$ une cond initiale X_0 dont les itérations
 (complètement déterministes) vont répliquer très exactement le
 tirage (complètement aléatoire)

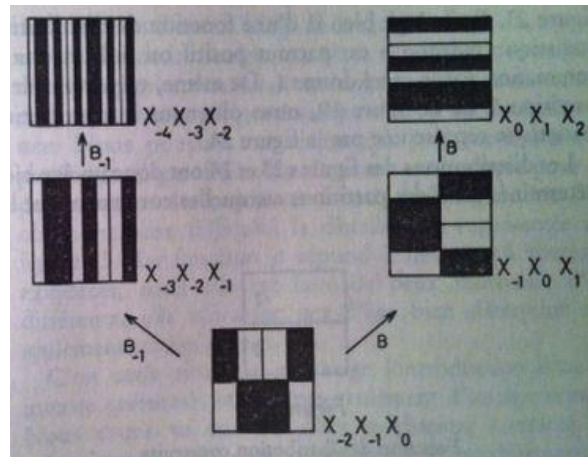
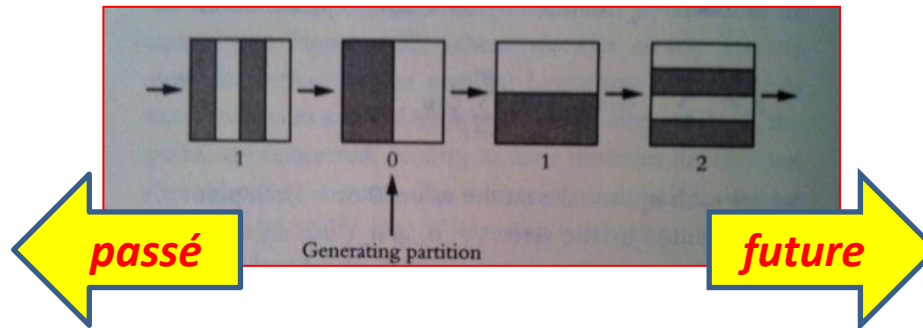


- Ds la T-boul si on procède de même avec une partit. de départ dite génératrice :
 - À droite → feuilleté horiz de + en + fin
 - A gauche → feuilleté vertic de + en + fin
- Périodique ?
 - Oui si les cond init : (X_0, Y_0) rationnels
 - La suite de 0,1 se répétant → on retrouve l'image initiale
 - On parle de récurrence : temps de retour (en steps) voir illustr.
 - Non si IRRAT : grande majorité :
 - La suite traverse l'ensemble de l'espace et couvre tous les points
 - Si cond init → 2m digit → état du syst avec erreur
- Liapounov ?
 - Pour les X → $\lambda_1 = \ln 2$
 - Pour les Y → $\lambda_2 = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

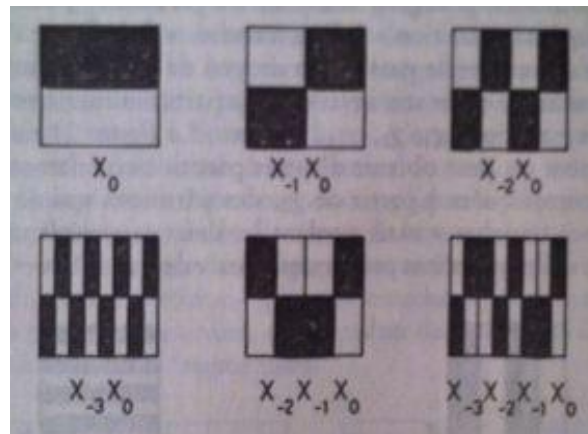


En résumé la tranfo du boul est
Inversible, REV, deterministe
récurrente ET pourtant
Totalemt chaotique

Transform. du boulanger -7 : on peut compliquer le process



Et introduire un temps fléché = Succession de steps ds un sens ou l'autre
 Reste à faire la relation avec les Prob ρ :
 ρ = toutes val vs part = 1-0 et $\int \rho = 1$
 $\rho = 1 + \rho^\sim$ avec $\int \rho^\sim = 0$

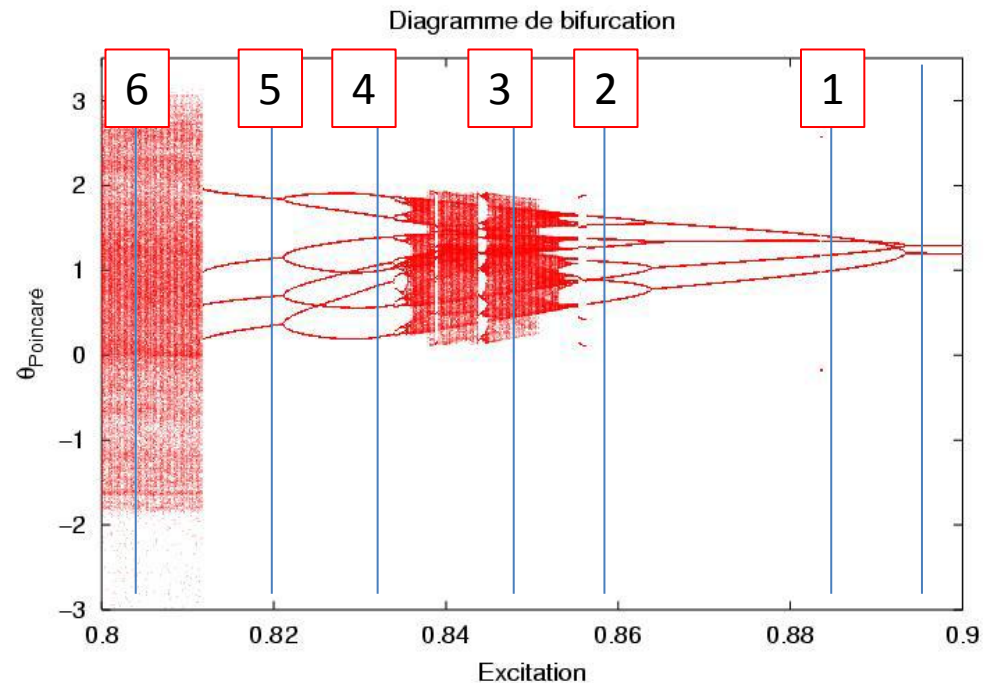
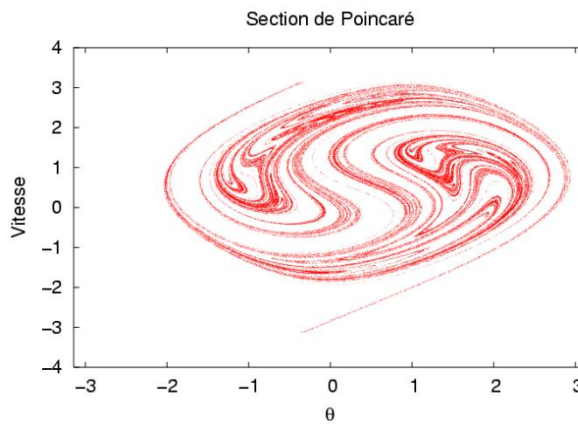
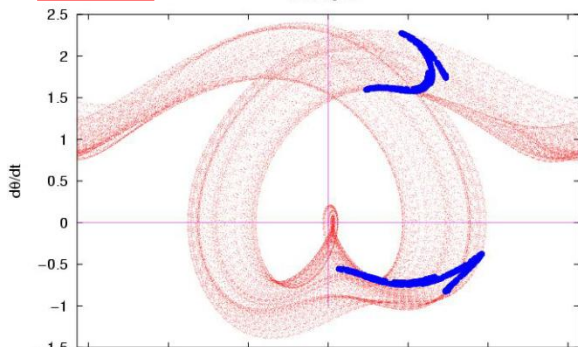
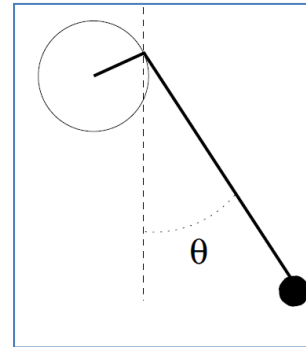
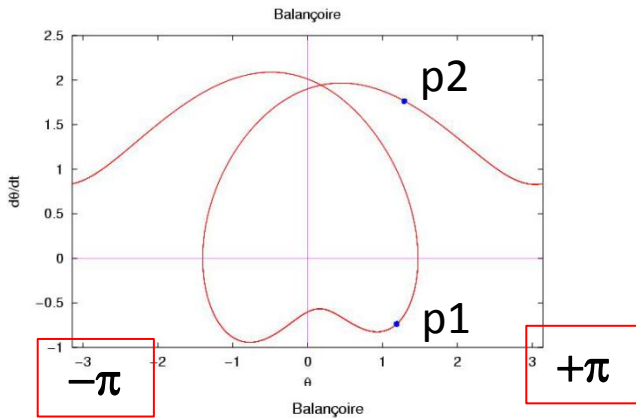


En forme de conclusion sur la T-boul -8

- La transformation du boulanger illustre ainsi la différence qualitative entre fini et infini, mais elle est intéressante à plus d'un titre. Comme tout système chaotique, elle met aussi en évidence la différence entre déterminisme et prédictabilité. Certes l'équation de la trajectoire d'un point soumis à une série de transformations est parfaitement déterminée.
- Pourtant on vient de voir que deux points infiniment proches l'un de l'autre suivent des destins totalement différents selon la nature - décimale, rationnelle ou irrationnelle- de leur abscisse.
- L'imbrication infinie entre ces trois ensembles de nombres rend impossible toute prédiction concernant la trajectoire d'un point matériel donné: attraction vers O, oscillation périodique ou trajectoire chaotique.
- La transformation du boulanger est un joli exemple mélangeant déterminisme absolu et imprédictibilité totale.

En prime pour tout résumer : Un dernier exemple de simple de chaos-1

- La balançoire à manivelle
- http://aristote.obspm.fr/treilles/fichiers/HandC_2.pdf



En prime et pour résumer : Un dernier exemple de simple de chaos-2

- Axe de la balançoire décentré → élément d'instabilité
 - Manivelle entraînée par moteur + engrenages
 - Manivelle réglable, poids réglable, vitesse réglable
- Chgmt des param → comportmt régulier / chaotique
 - Simulable « in silico »
 - Si influence des incertitudes ds C.I.
 - → fluctuations qui s'amortissent → comportmt régulier
 - → si elles s'amplifient → comportmt chaotique
- Etat du syst ds l'espace de phase : 2 param → 2 dim
 - L'angle θ : >0 à droite, <0 à gauche
 - Vitesse : >0 qd $\theta \nearrow$, <0 qd $\theta \searrow$
 - Pour un certain réglage initial
 - La repes ds l'EdP est périodique : une oscillation + un tour complet
 - On change (pièce ss bonhomme..) :
 - on retrouve m^{me} osc+révol mais → flou : impossible de suivre une traj précise
 - Néanmoins : pas n'importe quoi : certaines zones vierges (le syst ne sera jamais ds cette situation, certaines plus ou moins fréquentées : états + prob vers lequel revient le syst. → connaissance du comportmt « en moyenne »
 - On peut aller + loin en échantillonnt → « section de P α » *
 - Strobosc à vitesse du moteur → points bleus selon une (preque) ligne et pas du tout au hasard! → se retrouve après avoir traversé toute les traj. → périodique
 - Enfin si nouv chgmt de param → comportmt compltmt désordonné et illisible : on a qd même une section de P α qui montre un « ordre caché » : « crème de marron + crème vanille » (!!)
 - Structure fractale : une partie est la réduction de morceaux + grands
 - Si l'on examine comment se déforme la sP α : on retrouve la transfo du BOULANGER ! = Coexistence de zones d'étirement et de replis

L'incertitude entre traject voisines au départ grandit exp avec le temps et finit par dominer la prédiction : Il devient impossible de suivre les traject. Par contre (du fait du replis) → traj ramenées autour d'un comportmt MOYEN/ STATist

* Plutôt que d'observer l'ensemble de la traject ce qui peut se révéler trop complexe on va relever les car du mvmt à des instants successifs) .P α relevait ainsi les caract du passage de planètes ds une fenêtre d'observation

Prédiction impossible sur une expérience-traject particulière
Info statist très complète et de qualité

En prime et pour résumer : Un dernier exemple de simple de chaos-3

- Si on fait un gd nbre d'expériences avec diverses long de manivelle (param excitation) → diag de bifurcations
 - SP α → pos+vit par instant (flash strobosc)
 - On ne garde que la pos. → en fonction excitation
 - 2 types de comportmts : voir diagramme
 - 1/des comportements non-chaotique – périod. → en 0.82 ou 0.86 → 2-3-4 points
 - » → mvmt périodique (ex oscill+ revol)
 - 2/ des états chaotiques (en 0.85 ou 0.8)
 - Analyse
 - Si on part de 0.90 : 2 points périod.
 - Puis vers 0.89 → dédoublement 2 → 4 tjrs périod = BIFURCATION
 - » 2 oscill mais différentes
 - » Ce n'est que tous les 2 tours que le mvmt se répète
 - On continue : n'elles bifurc par dédoublement de plus en plus serré
 - » → CHAOS
 - Après le chaos et en ↘ l'excitation à 0.83 → à nouveau périod
 - Évolution vers bifurc inverses → 0.81 = explosion du CHAOS

CONCLUSION : Prigo : "l'essentiel est invisible pour les yeux"

- Sensibilité aux conditions initiales qui est la marque du chaos
- Pour un même système, cette sensibilité peut être présente pour certains réglages et pas pour d'autres, ce qui permet de faire passer le système d'un comportement apparemment désordonné à un comportement régulier une fois que l'on a compris sur quel levier agir

Une fois qu'on a dit tout ça....

– Comment traiter le pb? → PRIGO pas trop clair....

– En MC:

- Chaotic maps : on passe des T aux proba par l'op U de P-Fo

$$\rho_{n+1}(\mathbf{x}) = U \rho_n(\mathbf{x})$$

- En MC : nouvel Op → L = Op de Liouville

$$\rho \leftarrow i\delta\rho/\delta t = L \rho$$

- Solution → trouver représentat spectrale de L (€-f--€-v)

– Théorème qui dit que L a des €-v réelles ds H-space → évolution

– Equation de L se résoud comme suit → $\rho(t) = e^{-itL} \rho(0)$

- » Les I_n eigen-v → des termes en $e^{-itI_n} = \cos tI_n - \sin tI_n$
- » On est toujours t-symétrique
- » superposition de termes oscill.

– Pour introduire l'irréversibilité → rechercher des €-v complexes de la forme $I_n = \omega_n - i\gamma_n$ qui conduisent à un amortissement expon de type $e^{-\gamma_n t}$

- » À ce moment les $e^{-\gamma_n t} \rightarrow$ fort amortissmt ↘ qd t ↗ = FUTURE et forte divergence ↗ qd t ↘ = PASSE
- » On a ainsi brisé la symétrie du temps
- » Il faut pour cela quitter le H-space pour un « nouvel espace » qui admette les fonctions singulières
- » qui représentent la cas particulier des « trajectoires »

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x - 1/2 \\ B_2(x) &= x^2 - x + 1/6 \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \\ B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42} \end{aligned}$$

Théorème : un op peut se décomposer en ses €-f, €-v = décomposition spectrale

Ex= B-map → U se décompose en $B_0 + 1/2B_1 + 1/2^2B_2 + 1/2^3B_3 \dots 1/2^nB_n = \sum 1/2^i B_i \rightarrow$ où le $(1/2)^n$ amortit très rapidmt la série . $B_0, B_1, B_2 \dots$ polynomes de Bernouilli avec €-v = $1/2^n$

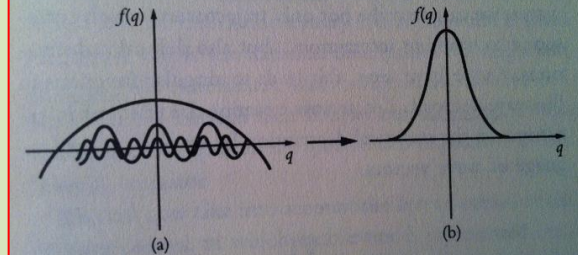
Les €-v réelles → traject

Les €-v virtuelles complètent la descript et introduise la rupture de sym du temps

Une fois qu'on a dit tout ça...

Superposition of Plane Waves

Trajectories resulting from the superposition of plane waves through constructive interference lead to a function characterized by dramatic peaking around $q = 0$.



- Si on compare descript-Traject vs descript-Stat
 - On se rend compte que la 2^{ème} introduit de nouveaux concepts en ce sens qu'elle fait apparaître une décomposition des proba en superposition de d'ondes obtenues par décomposition de Fourier
 - Ex partic libre sur 1 axe
 - Descript Traj : q =linéaire avec t , $p=C'te$
 - Descript Stat :
 - Se définit par des vecteurs d'onde associés au F-transform de q et p
 - » Du fait que ds ce cas l'Op de L est $L=ip/m \delta/\delta x$ dont les ϵ -f sont en e^{ikx} et les ϵ -v en $pk/m \rightarrow$ (rappel $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx \rightarrow$ ondes)
 - » Ces ondes occupent l'espace total vs traject= point
 - » La solution en représentation stat s'obtient par superposition de ces ondes-planes:
 - » Or ds ce cas les 2 représent doivent être identiques puisqu'il n'y a pas de perturbation et qu'on a qu'une trajectoire
 - Ceci est vérifié en constatant les effets constructifs–destructifs de la superposition des ondes dont le résultat est que tout le constructif se concentre sur q_0 et partout ailleurs le destructif annule les proba
 - On obtient (voir schéma) un pic à q_0
 - La chose étonnante : la traject n'est plus le concept 1^{er} mais se déduit de la construct stat.
 - » En super posant les ondes on peut $\rightarrow$ reconstruire la traject!!
 - » Ds le cas simple : cette superposition $\rightarrow$ resultats identiques entre les 2 représentations
 - » Ds les cas + complexe $\rightarrow$ des interferences = résonances peuvent intervenir $\rightarrow$ bouleverse la traject en détruisant les effets constructifs/ destructifs $\rightarrow$ alors un point représentant une traj ds l'EdP se décompose avec le temps en une multiplicité de points (idem $\rightarrow$ processus de diffusion) : les mêmes codit init $\rightarrow$ multiples traj comme en diffusion

Prigogine: « dès lors que l'on a réalisé cette description stat on peut formuler et « plugger » les facteurs additionnels adéquats pour observer l'émergence $\rightarrow$ structures dissipatives au niv MACRO. On commence alors à comprendre les racines dynamiques de l'organisation, celles de la complexité qui sont essentielles à l'auto-org et à l'émergence de la vie »

Prigo affirme : « il y a donc bcp de situation où l'on peut s'attendre à s'éloigner de la phys –N et où nos prédictions ont été vérifiées par d'exhaustives simulation informatiques »

$\rightarrow$ le reproche qu'on peut faire à l'exposé est que ceci est avancé sans preuves, ni illustration de ces simulations ni un qqconque élément pouvant aider à concrètement voir les choses.

$\rightarrow$ de plus on ne saisit absolument pas en quoi cette nouvelle description est effectivement plus riche et complète notre connaissance des choses.

Qu'en est-il en MQ? → on peut faire // avec MCavec des différences

- Traject → fct d'onde Ψ
- L'hamiltinien → H_{op}
- Tout pb est être résolu de façon déterministe par l'eq de S → au niv des proba d'amplitude (eq aux traject)
- MAIS: pb de la mesure (le chat...):
 - Superpos d'état ($\neq$ proba) → effondrmt de Ψ sur 1 posit ...
 - Il s'agit d'un phéno IRREV
 - inexplicable par Ψ
 - Comment l'intégrer?
- Irréductible dualité:
 - Ψ t-symétrique , REV
 - Effondrmt de → IRR + ↗ entropie

$\Psi\Psi^* = \Psi^2 = \text{proba}$
 $|\Psi| = \text{amplitude de prob}$

$$\hat{H}|\psi\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle$$

Interprétations multiples du
pb de la mesure :Cf exposé sur MQ

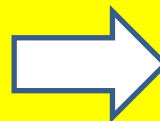
Effondrmt = décohérence
Serge Haroche – NOBEL 2012

- PRIGO rappelle les diverses tentatives d'interprétation:
- Gell-Mann coarse-grained → éliminer les termes d'interférence
- Girhardi-Rimini-Weber → introduire élmt de hasard qui $\downarrow \Psi$
- Shimony, d'Espagnat
-

Quel type de process dynam à la source de cet effondrement ?

PRIGO:

- A trouvé un moyen permettant incorporer $\downarrow \Psi$ dans des équat dynamiques
 - Role central de l'INSTAB
 - En termes de résonnances de $P\alpha$



Incorporer les $P\alpha$ -R ds la descrip stat →
dériver des termes de diffusion
sans effet sur Ψ

Qu'en est-il en MQ?

À compléter : personnellement je n'irai pas plus loin....si ce n'est pour ajouter:

- PRIGO: « en vérité , notre approche élimine la nature duale de la MQ et par là le paradoxe quantique de la mesure.
- Ce n'est plus le « mystérieux observateur » qui provoque l'effondrement de la fct d'o $\rightarrow$ mais la prise en compte des résonances de $P\alpha$.
- A ce stade nous avons reçu confirmation par toutes les simul num réalisées. »

$\rightarrow$ Ici à nouveau on a une déclaration de principe voire un auto-satisfaction et on aurait aimé que ceci soit illustré concrètement d'une façon ou d'une autre.....

$\rightarrow$ en conclusion sur toute cette partie qui nous est annoncée depuis le début du livre comme la réponse

ultime à la réconciliation des théories et à la prise en compte effective de la flèche du temps ds la MC et MQ

$\rightarrow$ on ne peut qu'être déçu et passablement frustré particulièrement dans la mesure où l'évident est étalé

avec complaisance et redites innombrables alors que l'aspect innovant de l'apport supposé passe tout simplement « à la trappe ».

$\rightarrow$ Au point de se demander s'il n'y a pas là une sorte d'imposture confortée par le fait que les thèses présentées n'ont-elles pas reçu d'écho de la part de la communauté scientifique?

Et pour conclure Prigogine s'interroge sur : « Does time precedes existence ? »

- Quelles sont les racines du temps ?
- Est-ce que le temps est né avec le Big Bang?
- PRIGO:
 - Le BB est un événement né d'une instabilité au sein du milieu qui a produit l'Univers
 - Il marque le début de notre U, mais pas celui du temps
 - Bien que notre U ait un âge ($14.7M^2$ d'années) le milieu qui a produit notre U n'en a pas...
 - Le temps n'a pas de début et probablement pas de fin!
 - Propriété émergente dont les racines seraient liées au caractère aléatoire de l'infiniment petit qui crée l'irréversibilité.
 - Le temps précéderait donc notre Univers.....

Tout ceci précise-t-il est à l'état de modèle et donc très préliminaire!!!...

Conclusion-1

« Le monde physique est une vaste scène où se joue une partie de dés permanente. Ce constat est l'aboutissement de la longue et tortueuse histoire de la dynamique marquée par de profondes mutations de l'idée de hasard.

D'abord « mesure » (et constat pratique) de notre ignorance d'un monde voué au déterminisme laplacien où règne la perfection des trajectoires individuelles accessible à l'inhumaine intelligence d'un démon, le hasard se fait probabilité que l'on croyait destiné à s'évanouir avec le progrès...

Il fallut le génie d'un Poincaré pour concilier les ambiguïtés d'un monde ensorcelé par le démon de Laplace: La perfection d'un monde microscopique déterministe et réversible, prédictible et l'illusoire irréversibilité du monde macroscopique. La rigueur mathématique contre le rêve éveillé d'un Boltzmann : achever la réduction de la thermodynamique à la mécanique.

Mais Boltzmann était un visionnaire...car c'est aussi Poincaré qui sape les bases de ce temple édifié à la gloire de la prédictibilité en découvrant des systèmes simples imprédictibles remettant en cause l'éternelle régularité du ballet des planètes. La découverte de Poincaré sera grosse d'un monde, celui du Chaos. Celui du hasard objectif.

Les vieilles résonances de Poincaré auront eu raison du vieux démon de Laplace en nous livrant un monde dynamique renouvelé où l'irréversibilité n'est que la partie visible du travail des instabilités microscopiques. Exit les vieilles trajectoires ! Place aux probabilités objectivées! La fin des certitudes écrira I. Prigogine et le début d'une vision physique renouvelée de la Nature où le rôle constructif du hasard peut opérer pleinement en nous livrant ces extraordinaires structures dissipatives, fruits de l'auto-organisation des systèmes loin de l'équilibre. La Vie nous est enfin accessible...l'ancien monde est mort. »

Conclusion-2

- On a réussi à ficher la « flèche du temps » ds la représentation phys du monde
 - On ne sait tjrs pas pour autant « qu'est-ce que le temps » ?
- On est encore tranquille pour 3-400 ans
 - Avant qu'une de nos planète s'en aille vivre sa vie..
- On a m en évidence le Higgs et conforté le « modèle standard »
 - On n'a tjrs pas de TOE (theory of everything) prouvable
 - Qui réconcilierait Gravitation et MQ
 - Même si les cordes et super-cordes « tiennent la corde »
- L'émergence resteimprévisible (par définition)
 - Et c'est tant mieux
 - Pour la vie et l'évolution
 - Même si on la cerne de plus en plus près
- Il reste encore bcp de NOBEL et de M-Fields a octroyer.....
 - Mais ceci est une autre histoire.....

Merci de votre attention

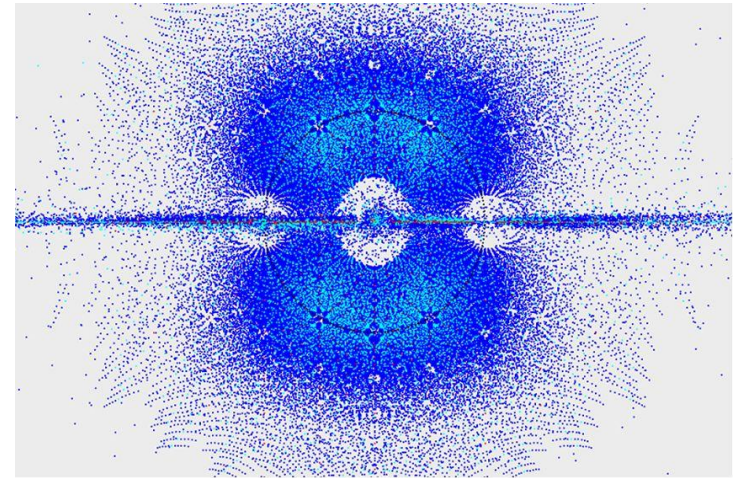
Annexes

Les nombres algébriques et transcendants

Tout nombre rationnel est algébrique, car le quotient p/q de deux entiers est racine de l'équation $qx - p = 0$.

Un nombre irrationnel peut être ou non algébrique. Par exemple $\sqrt{2}$ ou $(\sqrt[3]{3})/2$ sont algébriques, car ils sont les solutions de $x^2 - 2 = 0$ et $8x^3 - 3 = 0$, respectivement.

Le nombre complexe i est algébrique, car il est racine de l'équation $x^2 + 1 = 0$.



Les nombres algébriques.

Couleur d'après degré.

(bleue=4, cyan=3, rouge=2, vert=1).

Le cercle unité est noir.

Les nombres non algébriques sont dits transcendants.

L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

L'ensemble des réels étant non dénombrable $\rightarrow$ les transcendants aussi

Le polynôme minimal d'un nombre algébrique est le polynôme unitaire à coefficients rationnels de plus petit degré dont ce nombre est racine. Ce degré est appelé le degré du nombre algébrique. Par exemple, les nombres algébriques de degré 1 sont les rationnels ; i et $\sqrt{2}$ sont algébriques de degré 2.

Espace des phases

- Un exemple très schématique permet de fixer les idées.
- Prenons par exemple un [jeu vidéo](#) simulant la pose sur la [Lune](#) d'un [module d'exploration lunaire](#) (*Lunar Exploration Module*, [LEM](#)) : le joueur peut activer la propulsion pour ralentir la chute, et doit donc doser entre la gravité, qui fait descendre le module, et la propulsion (si celle-ci est trop forte, le module remonte). Si l'on ne voit sur son écran que la hauteur de l'engin par rapport au sol et que l'on estime *au jugé* sa vitesse verticale, cette opération est longue et difficile.
- Si en revanche on lui associe un petit diagramme matérialisant la situation par un simple point dans un système de coordonnées à deux dimensions (*altitude, vitesse*), le pilotage en est considérablement facilité : l'objectif est matérialisé par un point fixe à atteindre : le point (0,0) « au niveau du sol et sans vitesse », ce qui constitue bien la définition de l'atterrissage. Le problème en devient si simple qu'il peut être [automatisé](#).
- Or la vitesse n'est que la dérivée de l'autre coordonnée du diagramme, la position. C'est donc un exemple de construction et d'utilisation d'un espace des phases très simple qui permet néanmoins de tirer immédiatement profit de ce concept.

Espace des phases pour un mobile ponctuel

Les variables dynamiques = 6 : 3 var de position (x, y, z) et 3 var de [quantité de mouvement](#) (P_x, P_y, P_z).

D'après les équations de la mécanique, l'évolution d'un système décrit par un [hamiltonien ou un lagrangien](#) est entièrement déterminée par la donnée initiale de la position (x, y, z) et de la [vitesse](#) (v_x, v_y, v_z) — la masse étant connue, la quantité de mouvement est proportionnelle à la vitesse.

Espace des phases pour un gaz – N particules

Les variables dynamiques = $6 \times N$ mais $N \sim 10^{23}$

1 point de l'EdP $\rightarrow$ un état du système $\rightarrow$ EdP à $6N$ dim $\rightarrow$ impossible à appréhender $\rightarrow$ phys stat (Boltz)

Dégager les grandeur MACRO émergeant du fouillis MICRO : $P, V, T, \dots, E, \epsilon$.

Dégager des « lois » régissant l'EdP

Formalisme Lagrangien - Hamiltonien

$L=T-V$ par definition

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^d \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - V(q, t).$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

q_i = position $\rightarrow$ 3N coord.

$\dot{q}_i$ = vitesse $\rightarrow$ 3N coord, $\dot{q}_i = dq_i/dt$

t = temps

$p_i = q$ de mvmt = moment conjugué = $mv = m\dot{q}_i$

$L=T-V$

$T=T(q, \dot{q})$ = énergie cinétique = $\frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2$

$V=V(q_i, t)$ = énergie potentielle

Calculer L

Résoudre eq diff 2nd ordre d'E-L

En déduire p_i et $\dot{p}_i$ et q_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Formalisme Lagrangien - Hamiltonien

Les équations de Euler-Lagrange sont équivalentes au système de $2d$ équations du premier ordre données par

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (1.23)$$

avec la fonction de Hamilton définie par

$$H(q, p, t) := p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t), \quad (1.24)$$

et

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (1.25)$$

La fonction de Hamilton $H(q, p, t)$ est donc la transformée de Legendre par rapport à $\dot{q}$ de $L(q, \dot{q}, t)$.

On a remplacé les q°_i par des p_i et exprimé le mvmt de façon sym entre p°_i et q°_i

Formalisme Lagrangien - Hamiltonien

Forme canonique:
Tous les pb s'expriment
Sous cette forme unique

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

« Un des accomplissements
Les plus remarquables
De l'hist des sciences »

Ce jeu d'équations est appelé "équations canoniques de Hamilton" (canoniques car simples et symétriques). Elles découlent directement des équations de Lagrange et de la définition du hamiltonien. Nous avons remplacé n équations différentielles du second ordre (Lagrange) par $2n$ équations différentielles du premier ordre (Hamilton), ce qui est un gain appréciable en termes de résolution mathématique!

On peut donc choisir de résoudre un problème mécanique en utilisant le formalisme hamiltonien. Pour cela, il faut

- (1) Etablir le lagrangien $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t)$
- (2) Calculer les moments conjugués $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$
- (3) Calculer le hamiltonien $H(q, p, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$
- (4) Résoudre les $2n$ équations canoniques de Hamilton.

L'H constitue la loi du mvmt qq soit la représentation

-Meca Stat

-Meca Q

Les eq canon contiennent « a priori » toute l'évol du syst

-révers

-conservatives ($H = E^{ie\ totale} : E-pot \leftrightarrow E\ cinét$)

est un invariant du mvmt)

-Le couple de var canon peut être « choisi »

→ Trouver ce chgmt var → éliminer V et rendre T dépendant de p_i unique → N invariants

$H = T + V =$ énergie totale du système
 $L = T - V$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

- A reprendre de Feynman Meca-1

TBS later

The delta function has the fundamental property that

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

and, in fact,

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

for $\epsilon > 0$.

Additional identities include

$$\delta(x-a) = 0$$

for $x \neq a$, as well as

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x+a) + \delta(x-a)]$$

More generally, the delta function of a function of x is given by

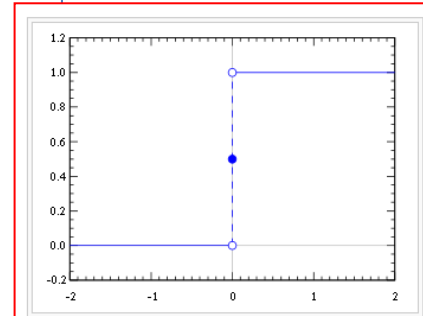
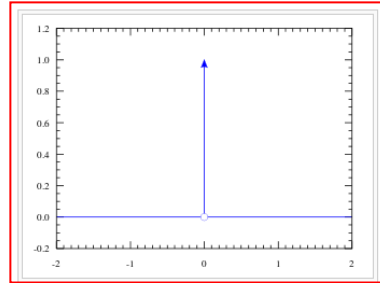
$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|},$$

where the x_i s are the roots of g . For example, examine

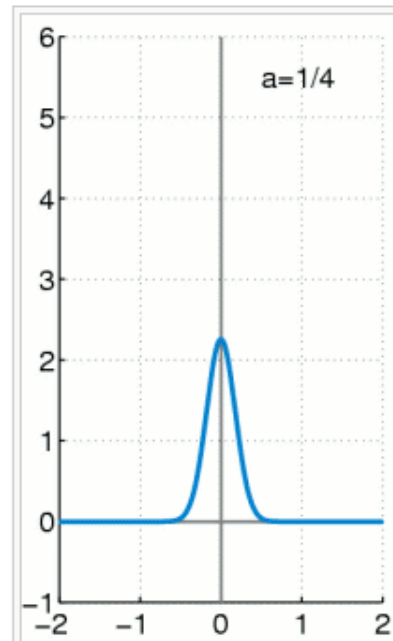
$$\delta(x^2 + x - 2) = \delta[(x-1)(x+2)].$$

Then $g'(x) = 2x + 1$, so $g'(x_1) = g'(1) = 3$ and $g'(x_2) = g'(-2) = -3$, giving

$$\delta(x^2 + x - 2) = \frac{1}{3} \delta(x-1) + \frac{1}{3} \delta(x+2).$$



$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(s) ds$$



The Dirac delta function as the limit (in the sense of distributions) of the sequence of zero-centered normal distributions

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-x^2/a^2} \text{ as } a \rightarrow 0$$

- For a trajectory $\rho = \delta(q-q_0) \delta(p-p_0)$ avec $\delta(x-x_0)=0$ when $x \neq x_0$

Le développement décimal d'un nombre irrationnel ne se répète jamais et ne se termine jamais. Le développement décimal d'un nombre rationnel se finit ou se répète.

Pour le démontrer, considérons un nombre rationnel : supposons que l'on divise deux entiers n par m (m étant non nul) ; alors lorsque l'algorithme de [division euclidienne](#) enseigné à l'école primaire est utilisé pour diviser n par m , il ne peut donner que m restes différents. Si 0 n'apparaît jamais comme reste, alors l'algorithme ne peut effectuer plus de $m - 1$ étapes sans redonner un même reste. Après cela, si un reste réapparaît, alors le développement décimal se répète ! Inversement, supposons qu'il y ait dans le développement d'un nombre des [décimales récurrentes](#) ; on peut alors démontrer que le nombre est une fraction de deux entiers. Par exemple :

$$A = 0,7162162162 \dots$$

Dans ce développement, la longueur de la séquence de décimales répétées est égale à 3. Multiplions par 10^3 :

$$1000A = 716,2162162 \dots$$

Remarquez que puisque nous avons multiplié par 10^3 la longueur de la période, nous avons décalé des chiffres vers la gauche par rapport à la virgule d'autant de positions.

Nous remarquons alors que les décimales de $1000A$ et de A à partir d'une certaine position sont identiques. Ainsi dans l'écriture décimale de $1000A$ et de A la séquence 162 se répète à partir d'un certain rang.

Par conséquent, lorsque nous soustrayons A à $1000A$, les décimales de la différence deviennent nulles à partir de ce rang.

$$999A = 715,5.$$

Ainsi

$$A = \frac{715,5}{999} = \frac{7155}{9990} = \frac{135 \times 53}{135 \times 74} = \frac{53}{74},$$

qui est un quotient de nombres entiers et apparaît donc comme un nombre rationnel.

Paradoxe de $2 = \sqrt{2}$

L'escalier mesure 2

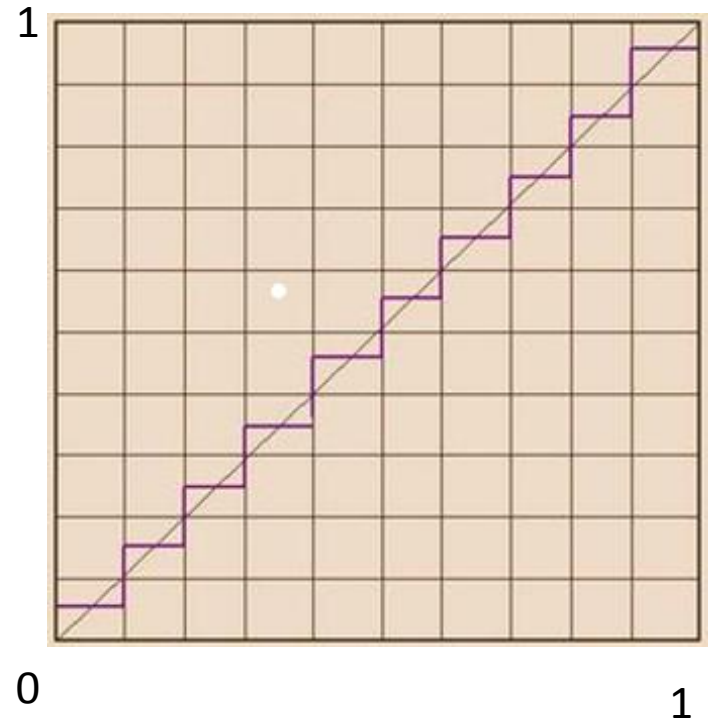
Qd le nombre de marches de l'escalier $\rightarrow \infty$

L'escalier ne se distingue plus de la diagonale

Par contre sa long est tjrs égale à $2 = \sqrt{2}$ long de la diagonale .

Plusieurs explic:

Celle des fractales et de la poussière de Cantor!!



Albert Jacquard, *L'équation du nénuphar* : invoque aussi Cantor pour indiquer que le nombre de tournants de la courbe violette tend vers **l'infini des nombres entiers** (aleph 0), alors que la diagonale représente **l'infini des nombres réels** (aleph 1) très >>>> : ces deux infinis sont différents, donc « 2 n'est pas égal à $\sqrt{2}$ ».

Bibliographie-1

- Exposant de L
http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/chaos_fract/Lyapunov/Lyapunov.html
- Stabilité de L http://fr.wikipedia.org/wiki/Stabilit%C3%A9_de_Lyapunov
- DIRAC
<http://arxiv.org/pdf/quant-ph/9907070v1.pdf>
- principe de moindre action
<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~herau/Docs/Her08-slides-moindreaction.pdf>
- Université de Madras cours video – EXCELLENT *****
<http://www.cosmolearning.com/video-lectures/lecture-16-exponential-divergencies-lyapunov-exponent-bernoulli-map-and-frobenius-perron-equation-9738/>
- cours de CAMBRIDGE
<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/dt281/dynamics/clas.pdf>
- Le Ferrera : tout ce que je cherchais sur L & Hamilton
<http://fhqed.free.fr/cours/mecanique%20analytique.pdf>
- <http://theory.physics.unige.ch/~durrer/courses/mecall.pdf>
- Cours de meca analytique ***
<http://fhqed.free.fr/cours/mecanique%20analytique.pdf>

Bibliographie-2

- les maths super simples

<http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/Default.htm>

- Physique statistique

<http://books.google.fr/books?id=OY3JzcPOqu0C&lpg=PA206&ots=ElsRTrsyu&dq=d%C3%A9riv%C3%A9e%20fonction%20delta%20dirac&hl=fr&pg=PA80#v=onepage&q=d%C3%A9riv%C3%A9e%20fonction%20delta%20dirac&f=true>

- Espace de phase:

http://aristote.obspm.fr/treilles/fichiers/HandC_2.pdf

- Transfo du BOULANGER

<http://www2.lifl.fr/~delahaye/dnalor/ImagesBrouillees.pdf>

- sur POINCARÉ

<http://www.matierevolution.fr/spip.php?article721>

- syst non lin et intro au chaos

<http://pimprenelle.lps.ens.fr/biolps/sites/default/files/teaching/4/c4.pdf>

- cours interessant sur chaos

<http://www.astrosurf.com/luxorion/chaos-science2.htm>

<http://www.astrosurf.com/luxorion/chaos-systemesolaire2.htm>

- Transfo BOULANGER

<http://webinet.cafe-sciences.org/articles/linfinie-fecondite-des-maths/>

<http://webinet.cafe-sciences.org/articles/boulanger-la-saga-continue-22/>