

Trois anecdotes qui éclairent les décisions face au risque... ou complexes

Bertrand Munier

Emergence, 13 janvier 2025

Un mot sur les lieux de recherche

Du GRACE au GRASCE puis au GRID

- **Projet GRACE** (1974) : Les choix rationnels *non répétés* et le risque
- Association avec Jean-Louis *LE MOIGNE* (1975-)
 - **GRASCE** (1976-1988) (puis JLLM -1994)
(Université Aix-Marseille + CNRS)
 - **GRID (1989)** (Ec. Normale Sup. de Paris-Saclay + CNRS, 1990-2004)
- *
- *Affiliations successives en tant que professeur : U^{té} Aix-Mlle puis ENS*
- *2006-2011 : 'Joint appointment' Sorbonne-ENSAM*

1^{ère} anecdote : le dilemme du Chevalier de Méré (1654)

3

- Antoine Gombaud...Stat-matheux amateur jeux aux règles 'pipées'. Il gagne mais... se trompe parfois et perd 🤔
- Quand il ne comprend pas ➡ Académie du Père Mersenne...
- ... pb.:
- Jeu pile ou face, 2 personnes, règle: 3 coups gagnants emportent la mise (64 pistoles, forte somme).
- En la circonstance, le jeu a été arrêté après 3 coups, 2 coups gagnés par A, 1 gagné par B. Comment partager l'enjeu ?

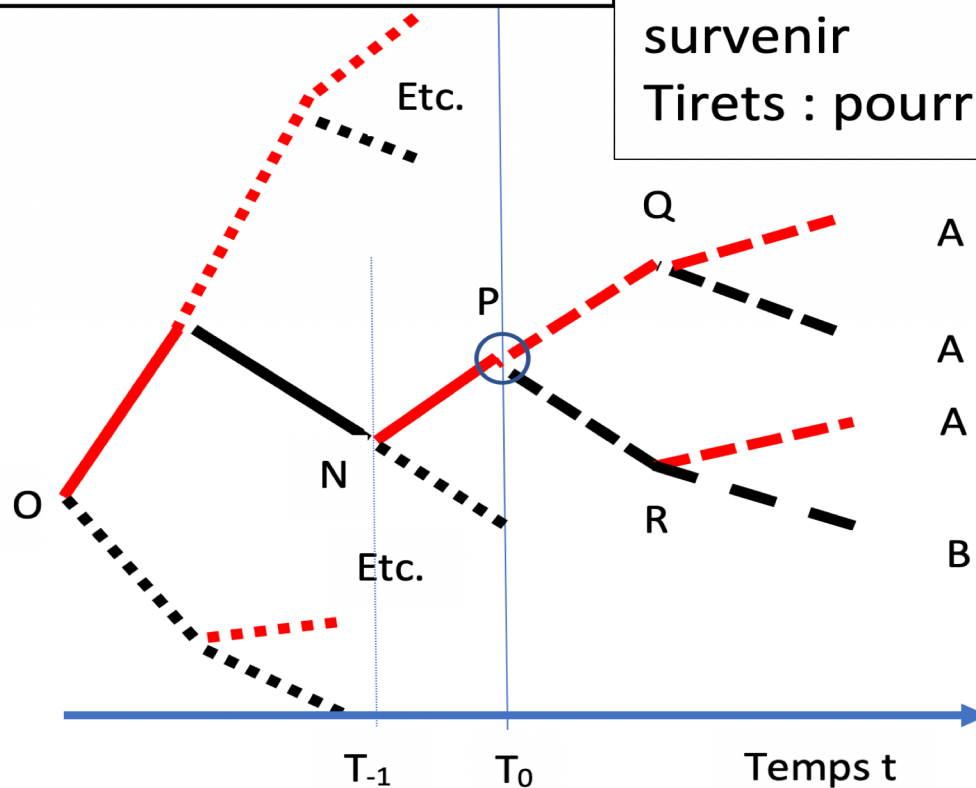
Solution de Pascal (1654) : La « Règle des Partis »



4

En rouge : Point pour A
En noir : Point pour B

Trait plein : histoire à T_0
Pointillés : aurait pu survenir
Tirets : pourrait survenir



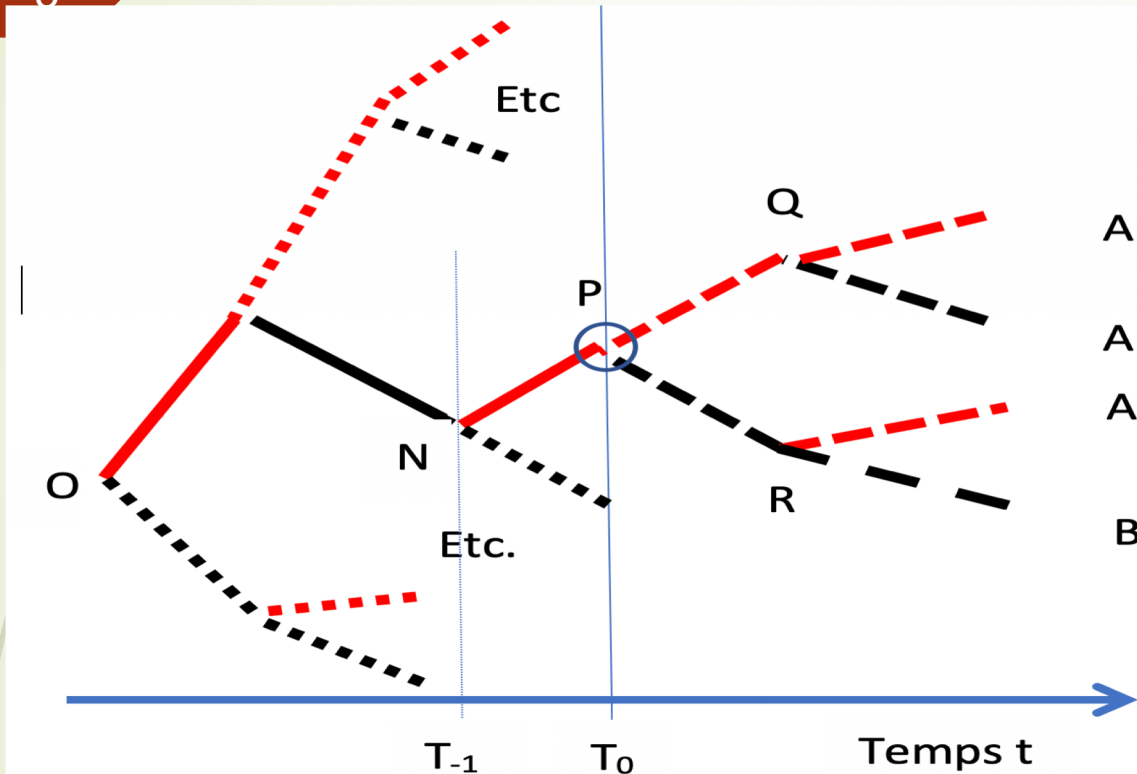
En Q : A est sûr de 64
R : A espère $\frac{1}{2} \times 64$
En P, égales chances de Q et de R.
Donc, espérance de A en T_0 :
 $\frac{1}{2} \times 64 + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} \times 64) = 48$

 $\approx \dots$ 'ce à quoi A peut légitimement s'attendre'...

Solution de Fermat (1654)



5



- Le (sous)-arbre (complété par les tirets) donne 3 chances sur 4 à A. Donc:
- $\frac{3}{4} \cdot 64 = 48$ pour A, 16 pour B.
- Solution id°, mais Pascal: «Backward Induction»

Règle des partis, mais aussi « gain espéré (GE) ». P.ex.: $GE(x_1, p_1; x_2, p_2; x_3, p_3)$
 vaudra : $p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + p_3 \times x_3$ En O : $\sum_i p_i \times x_i$: « valeur du jeu »

Parenthèse : vocabulaire... notation...

6

- **'Loterie'** (ou 'prospect'): ici notion formelle $\approx$ n'importe quel actif risqué (contrat conditionnel, action, investissement, etc.)
- On note : $(x_1, p_1; x_2, p_2 \dots; x_n, p_n)$ et on convient IC:
- $$x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n$$
- Equivalent discret d'une variable aléatoire continue $\tilde{x}$
- Distribution de probabilité... (bâtonnets ou fct continue)...
- **$F(x^*)$: Fonction de répartition** $\approx p(x \leq \text{nbre } x^* \text{ donné}) \approx$
Distribution cumulative (de 0 à 1)
- **$1-F(x^*)$: Distribution** **décumulative** $\approx p(x > \text{nbre } x^* \text{ donné})$
(de 1 à 0)

13 janvier 2025

Rapprochons « Espérance de gain » et « Pari » de Pascal...

7

- Mais règle du « gain espéré » paraît dans ce cas « fumeuse » :
- Pascal très innovant : *vous ne pouvez pas prouver que p est nul !*



- **Au moins 3 notions de proba** à concilier... en fait « croyance »
- Nature du 'résultat' ICI?
- Risque / Incertitude

États du Monde

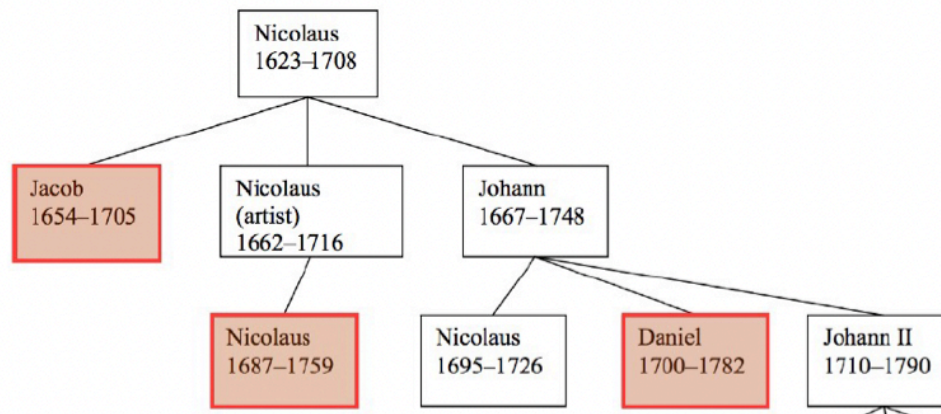
Choix
possi-
bles

	Dieu existe (p)	Dieu n'existe pas ($1-p$)
Croire	$+\infty$	Perte de temps $-P$
Ne pas Croire	$-\infty$	Temps utilisé $+T$



2^{ème} anecdote La famille Bernoulli fait le buzz de l'Europe scientifique

- A Bâle, l'oncle : Jakob Bernoulli : ...« Ars Conjectandi » (posth. † 1713)
- ... Livre curieux mais formidablement innovant... 4^{ème} partie : appli. 'Probabilité subjective' tribunaux... et même: « biais cognitifs »...



Nikolaus
(1687-1726)



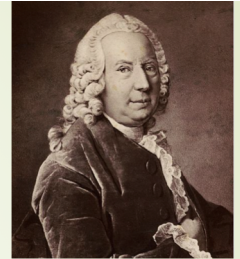
Daniel (vers 1750)
(1700-1782)

Une remarque de (notre) Nicolas (1713) fait parler d'elle pendant tout le siècle (→1777) et au-delà

9

- 'test expérimental' de la Règle GE par Nicolas : Pile ou Face?
- On jette la pièce jusqu'à ce que le choix fait par le joueur apparaisse. Si ce choix apparaît au 1^{er} jet : 1, au 2^{ème} jet : 4, 3^{ème} jet : 8, etc.
- Questions :
- Quel droit d'entrée êtes-vous prêt à payer pour participer à ce jeu?
- Résultats « paradoxaux » dans sa lettre du 9 septembre 1713 à M. Rémond de Montmort...
- ... envoyée ensuite à d'autres dont le jeune cousin Daniel

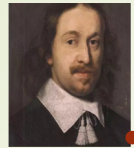
'Paradoxe' et résolution par Daniel (1738)



10

- Pas plus de 20 Ducats offerts !!! Alors ?
- C'est l'espérance des gains ressentis qui compte, dite 'Emolumentum' (E_m), traduit par 'Utilité'
- Daniel Bernoulli pose 1) $dE_m(x_i) \approx k \cdot dx_i$ et 2) $dE_m(F+x_i)/d(F+x_i) = 1/F$, si F est la fortune de l'individu à laquelle s'ajoute un gain x_i . En intégrant, on obtient une fonction logarithme du gain $E_m(F+x_i) = k \cdot \log((1+x_i)/F)$
- ... Emolumentum espéré ($E_m E$) est alors fini :
Paradoxe expliqué !
- D'où la règle de 'l'utilité' espérée de Bernoulli
- Jacques Cramer (1729) : idée id°, autre fonction concave
- ... Pas très satisfaisant (vous parliez de « risque » ?) ...
mais les autres solutions...

. Le cheminement de l'idée d'utilité et de proba subj.



Règle des Partis
Blaise Pascal
Pari

1654
1656-60



Lettre du 9 09 13
Nicolas Bernoulli
Spec Th
1738
Nov de mens sortis
Daniel Bernoulli



150 ans
...sans
ajout
notable...



Theory of Games...
J. Von Neumann
et O. Morgenstern
1938-44



L. De Finetti, La dsécision
1938



The Foundations of
Statistics
1951-54



L. J. Savage
Paradoxe
modèle d'Allais
(1952-1988)



A Th.of Anticipated U.
J. Quiggin
1982



Cumul. Prosp. Th.
Tversky & Ka
1992

1938-1947 : John v Neumann, Oskar Morgenstern exhument Daniel Bernoulli

Depuis 1945, 2 sous-périodes :

En 1950-54 puis 1970-1980 : Expérimentations et contre-exemples à l'UE

Années 80 : Elaboration de modèles *alternatifs* à l'UE

La règle (UE) de von Neumann et Morgenstern (1947)

- $U(L)$ déf sur ttes les valeurs possibles d'une distribution L ($\neq$ D. Bernoulli)
- $U(L_1) \leq U(L_2) \Leftrightarrow L_1$ est non préférée ou indifférente à L_2 ou encore : $L_1 \preceq L_2$
- Des hypothèses plutôt intuitives... MAIS AUSSI continuité et surtout additivité (axiome « d'indépendance »). Alors:
- Si l'on pose $U(x_i, 1) = u(x_i)$, « utilité VNM », on obtient une expression apparemment semblable à celle de Daniel Bernoulli :

$$U(L) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + p_3 u(x_3) ,$$

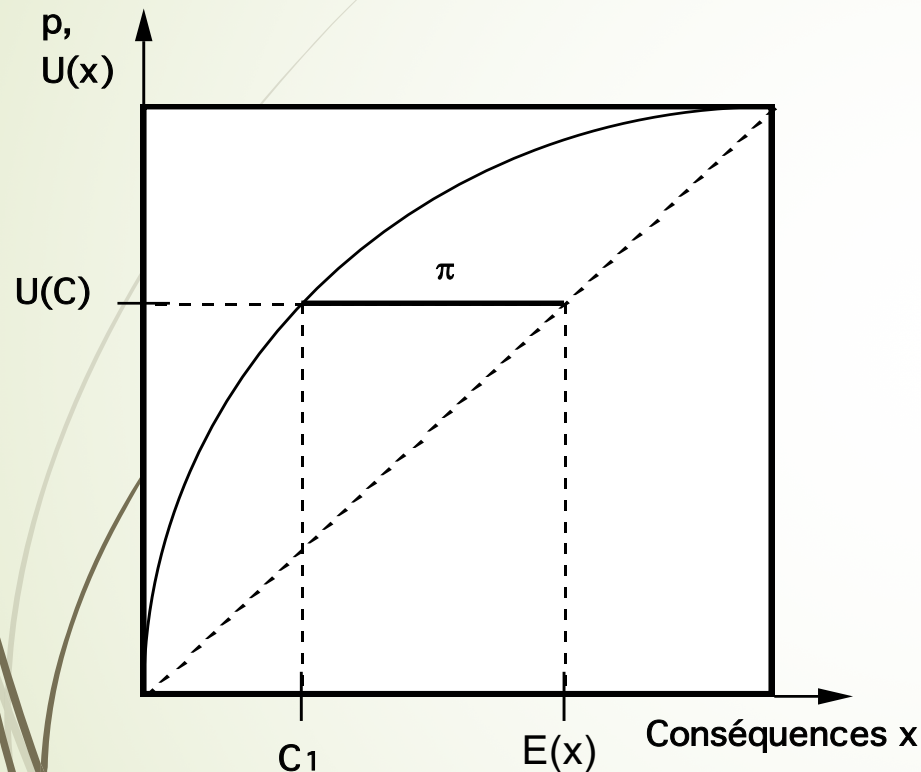
- MAIS 2 énormes différences conceptuelles avec Daniel Bernoulli,
(1) Fondée sur risque de la loterie L et (2) elle est moins rigide : *forme* très différente d'un individu à l'autre...!
- Heureusement, on sait (depuis 50 ans) « éliciter » $u(x)$ d'un individu

...On peut donc se servir de cette règle en vue de l'action : notion «d'élicitation»

- $u(x_i)$ peut (ET DOIT, si on veut l'aider à décider) être « élicité » auprès de chaque individu... que cette fonction caractérise
- Raffinement des protocoles pour éviter beaucoup de « biais » repérés, tests statistiques, « répliques » d'expériences)
- N.B.: la *valeur absolue* de $u(x_i)$ n'a aucune signification : l'utilité VNM est une «échelle d'intervalles» (cf. températures usuelles)
- En revanche, la forme de la fonction est significative : concave (aversion au risque), convexe (appétit pour...), affine ou linéaire (« neutralité au risque »)

Aversion au risque, appétit pour le risque, neutralité par rapport au risque

14



C_1 est « l'équivalent-certain » de $\tilde{x}$

➤ Si l'utilité VNM concave, le *prix de vente* d'un actif représenté par la loterie x sera $C_1 < E(x)$ si $E(x)$ est le gain espéré de cet actif (dit aussi « valeur actuarielle » de l'actif)

➤ $E(x) - C_1$ est le prix du risque...

➤ On montre : $\pi \cong -\frac{u''}{u'} \frac{\sigma^2(\tilde{x})}{2}$

➤ $u(x)$ concave $\Leftrightarrow \pi > 0$ (« aversion au r. »)

➤ convexe < 0 (« appétit p. l. r.)

➤ linéaire $= 0$ (« neutralité au r. »)

➤ $-u''/u'$: Coefficient d'Arrow-Pratt

3^{ème} anecdote: un polytechnicien peu occupé s'adonne à des « oisivetés » en économie (1940)

- Allais
- Un « amateur » en économie qui deviendra Prix Nobel !
- Face à VNM, il n'est pas convaincu :
- Colloque de Paris (dit « Econométrie ») en 1952
- D'abord l'intuition et éléments de formalisation... Mais hôtes américains pas convaincus
- ⇒ Le lendemain, Allais propose un test devenu « paradoxe d'Allais »

« Paradoxe » d'Allais : question A



SANS FAIRE
DE CALCUL !

- **A1** = (1M€, 100%) ou
- OU
- **A2** = (0€, 1% ; 1M€, 89% ; 5M€, 10%)
- ?

« Paradoxe » d'Allais : question B

B1 = (1M€, 90% ; 5M€, 10%)

OU

B2 = (1M€, 89% ; 5M€, 11%)

➡ ?



Bertrand Munier, Emergence

**RIEN NE VA PLUS !
On pose les stylos !**

« Paradoxe d'Allais » : résultats

18

- Importante proportion des sujets (de 45 à 65%) :
 - $U(A1) > U(A2)$ ET $U(B2) > U(B1)$
- (même Savage, et les théoriciens de l'utilité espérée!)
- Mais ensuite échantillon plus vaste...Répliqué des milliers de fois à travers le monde
- Résultat le plus robuste de l'expérimentation sur la décision face au risque
- Incompatible avec toutes règles de choix précédentes

Paradoxe d'Allais viole TOUTES les règles précédentes

19

- $\neq$ Règle du Gain Espéré (GE) : $GE(A1) < GE(A2)$ et $GE(B1) < GE(B2)$
 - Donc: $A1 < A2$ et $B1 < B2$
- $\neq$ Règle de choix de Daniel Bernoulli ($E_m E$) (avec $F=50M\text{€}$, $k=10$) :
 $E_m E(A1)=0,086$. $E_m E(A2)=0,118$. $E_m E(B1)=0,119$. $E_m E(B2)=0,122$.
Donc: $A1 < A2$ et $B1 < B2$
- $\neq$ Règle d'utilité espérée vNM (UE) :
- $UE(A1) < UE(A2)$ et $UE(B1) < UE(B2)$, donc $A1 < A2$ et $B1 < B2$
- Aucun polynôme du 1^{er} degré ne décrit donc les comportements d'une large partie des individus ! C'est tout simple !

En quoi le paradoxe d'Allais est-il important?

- Intuition très significative: +1% de probabilité de gain bcp+ impt si on passe de 99% à 100% que si l'on passe de 50 à 51%
- La règle de choix devient alors « non linéaire en probabilités »: on « transforme » mentalement les probabilités
- Incompatibilité (ci-dessus) avec toutes les autres règles d'espérance.... Évidente... Mais pas compris années 50, débat confus, âpre... lassant...
- Reprise expérimentations années 70 par psychologues : d'autres contre-exemples à l'UE confortent paradoxe d'Allais
- Mais ne s'agit-il que de contre-exemples à l'UE ?

3 coups de tonnerre (1979, 1980, puis 1982) et une floraison de modèles années 80

21

- Livre Allais-Hagen (1979) de synthèse-réaffirmation
 - Charles Plott (1980) : Si c'est vrai, tout (= beaucoup!) est à refaire en théorie économique (...)
 - Mark Machina (1982) : les contre-exemples 'révèlent' un « pattern » presque commun ! Qu'y a-t-il derrière ?
-
- La direction est donnée ⇒ Floraison de modèles ds années 80... (Survey B.M. 1989, *Revue d'Éco. Pol.*)
 - A la demande d'Allais : en 1986, FUR III est organisé à Aix-en-Provence (Actes en 1988)

13 janvier 2025

Vers l'utilité « à dépendance de rangs » (EUDR)

22

(Quiggin 1982-Allais 1952-1986-T & K 1992)

- **Agriculteurs australiens (Quiggin) Retour sur le colloque de 1952**
- **l'idée d'Allais : on ne transforme pas les probabilités des 'bons' résultats comme on le fait pour les 'mauvais'**
- **➡ on 'range' les résultats... distribution (dé)cumulée**
- **Mais il faut développer l'idée (Quiggin, 1982, mentionne sa source), puis Allais le fait (1986) sans connaître le travail de Quiggin**
- **Récupération par Tversky et Kahneman sous le nom de CPT (1992)**

13 janvier 2025

Petit détour de réécriture : l'espérance d'utilité (UE) comme aire intégrale

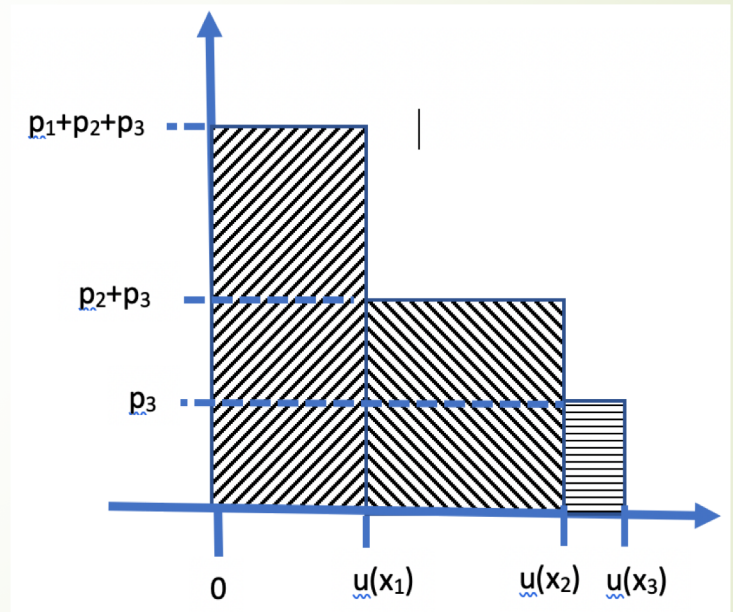
➤ $UE(x_1, p_1; x_2, p_2; x_3, p_3) = p_1 \cdot u(x_1) + p_2 \cdot u(x_2) + p_3 \cdot u(x_3)$

➤ Mais AUSSI:

➤
$$\begin{aligned} & u(x_1) \cdot (p_1 + p_2 + p_3) \\ & + [u(x_2) - u(x_1)] \cdot (p_2 + p_3) \\ & + [u(x_3) - u(x_2)] \cdot (p_3) \end{aligned}$$

➤ Distribution « décumulative » discrète

➤ Evaluation (psy) 'incrémentale' d'une distribution vs. 'moyenne'



La règle d'Allais-Quiggin à dépendance de rangs (1988)

24

(repris par T&K en « Cumulative Prospect Theory », 1992)

➔ $UEDR(x_1, p_1; x_2, p_2; x_3, p_3) =$

➔ $u(x_1) \cdot \theta(p_1 + p_2 + p_3)$

+ $[u(x_2) - u(x_1)] \cdot \theta(p_2 + p_3)$

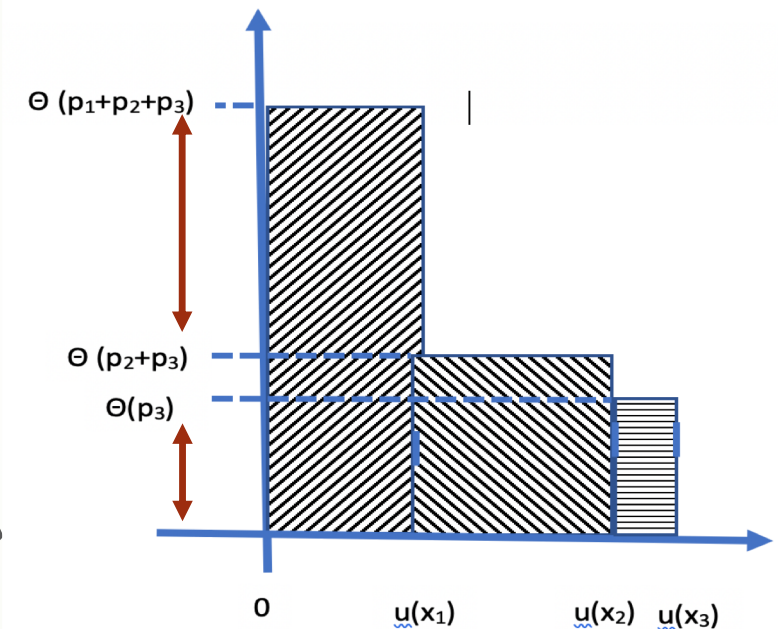
+ $[u(x_3) - u(x_2)] \cdot \theta(p_3)$

➔ Avec $\theta(0)=0$, $\theta(1)=1$ et $\theta'(p) > 0$

➔ θ : fct « transformation de probabilité »

➔ OU BIEN :

➔ $w_1 \cdot u(x_1) + w_2 \cdot u(x_2) + w_3 \cdot u(x_3)$ avec $w_i = \theta(\sum_{j=1}^i p_j) - \theta(\sum_{j=1}^{i-1} p_j)$.

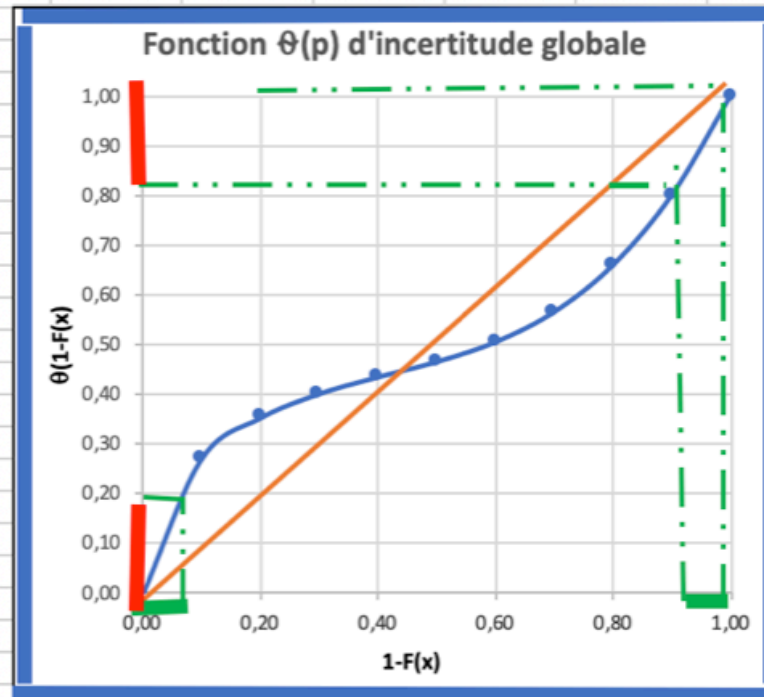


Exemple de transformation de probabilité

25

$$\theta(p) = (x^{0,8584} + \text{EXP}(2,46 \cdot (x-0,61)) \cdot x^{3,0365}) / (1 + \text{EXP}(2,46 \cdot (x-0,61)))$$

0,00	0,00
0,10	0,27
0,20	0,35
0,30	0,40
0,40	0,43
0,50	0,47
0,60	0,51
0,70	0,57
0,80	0,66
0,90	0,80
1,00	1,00



$p=0,10$ est transformé en $p^*=0,27$ pour le meilleur résultat

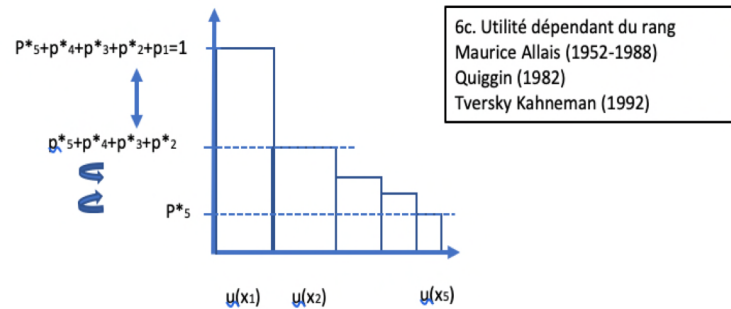
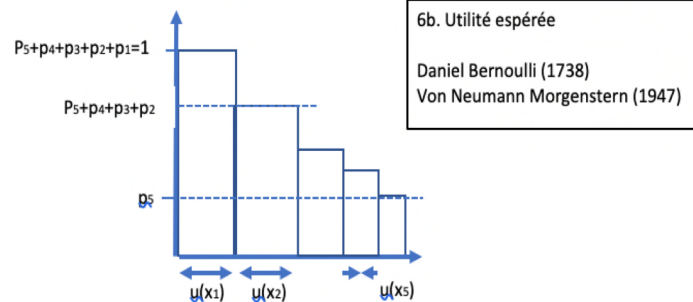
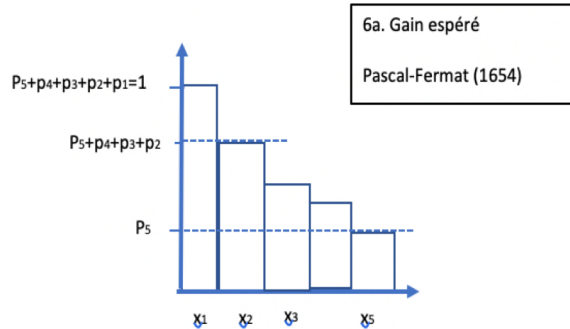
$p=0,10$ est transformé en $p^*=0,20$ pour le pire résultat

Courbe élicitée
à l'aide du
logiciel *NERP*
8.0

*Comportement
fréquent, « sur-
pondérant » les
probabilités des
résultats
extrêmes*

3 anecdotes ou 400 ans d'analyse de la décision?

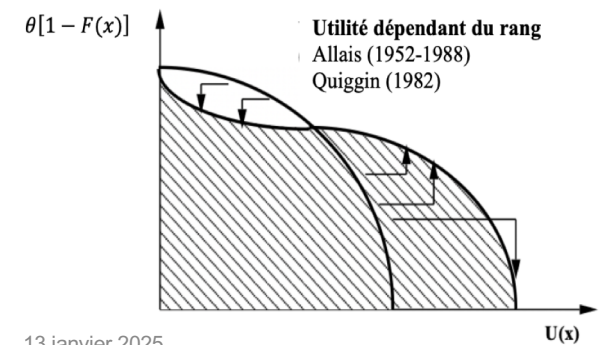
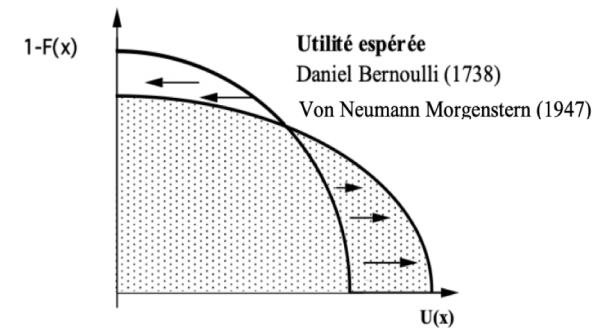
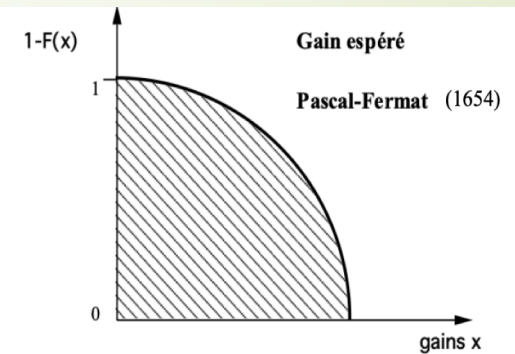
26



Bertrand Munier, Emergence

c
a
s
d
i
s
c
r
e
t

c
a
s
c
o
n
t
i
n
u



13 janvier 2025

Ce que Allais-Quiggin permet de comprendre...

27

- « **Equity premium puzzle** » : inexplicable sous UE mais profil de la distribution des résultats d'actions implique exigence primes de risque + fortes
- Demande d'**hyper-sécurité** de nos sociétés,
- Rejet du nucléaire par le grand-public... Et peut-être justification de la politique de **management des risques (déterministe) de l'Autorité de Sûreté Nucléaire**
- **Achat de billets de loterie et de contrats d'assurance** par le même individu: impossible sous UE (u. convexe ou u concave...). Mais la surpondération pas du même côté!
- Id° modélisation du **spéculateur-type** (Citation d'Allais, 1952)
- Leçon: **Le risque n'est pas que variabilité** (variance), il est aussi et peut-être **surtout asymétrie** (ou 'structure' de la distribution de probabilité.....

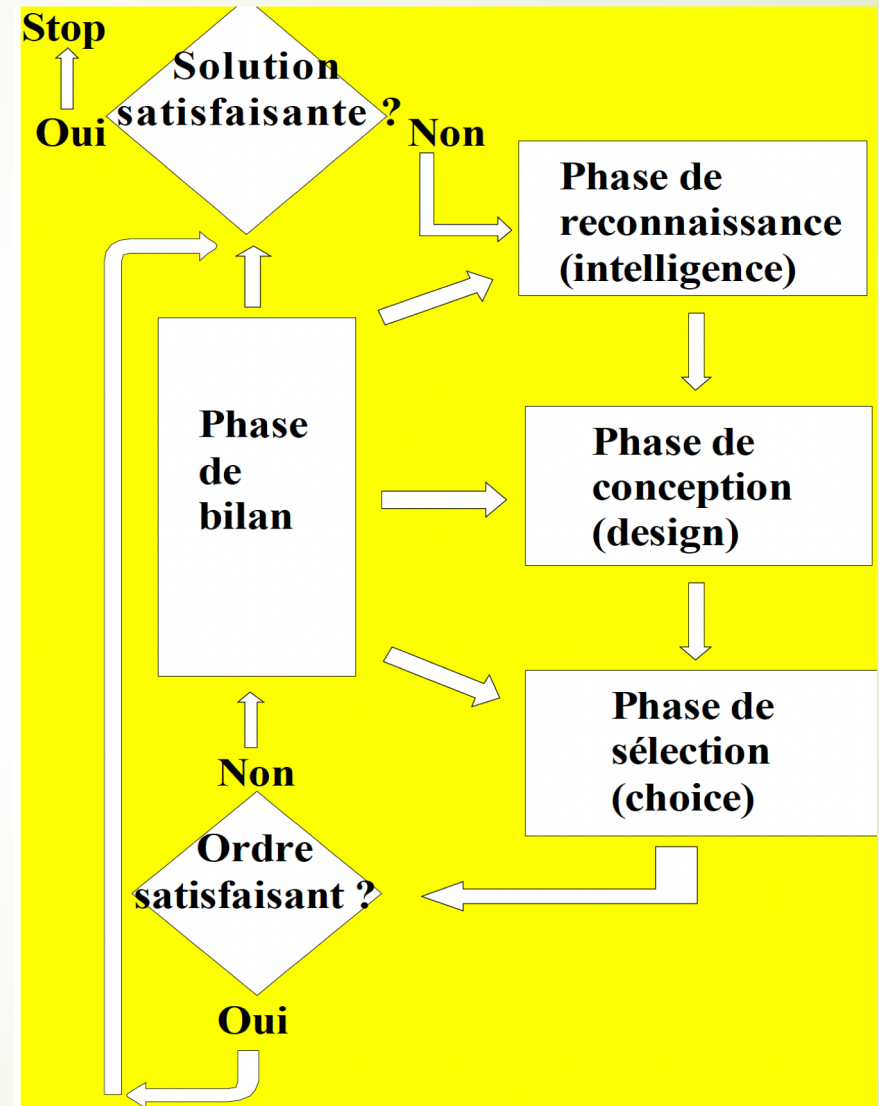
Et la Complexité ?

Rappel: la décision organisationnelle selon H. Simon

29

- Le modèle « canonique » de la décision de Herbert A. Simon (1960)
- Face à un monde complexe, notre rationalité est effective, mais limitée (Simon, 1955)
- La rationalité des décisions est davantage le processus que le produit de la pensée (Simon, 1978)
- Incompatibilité des deux concepts?

Bertrand Munier, Emergence



Herbert Simon et J-L. Le Moigne au GRASCE (janvier 1984)

30



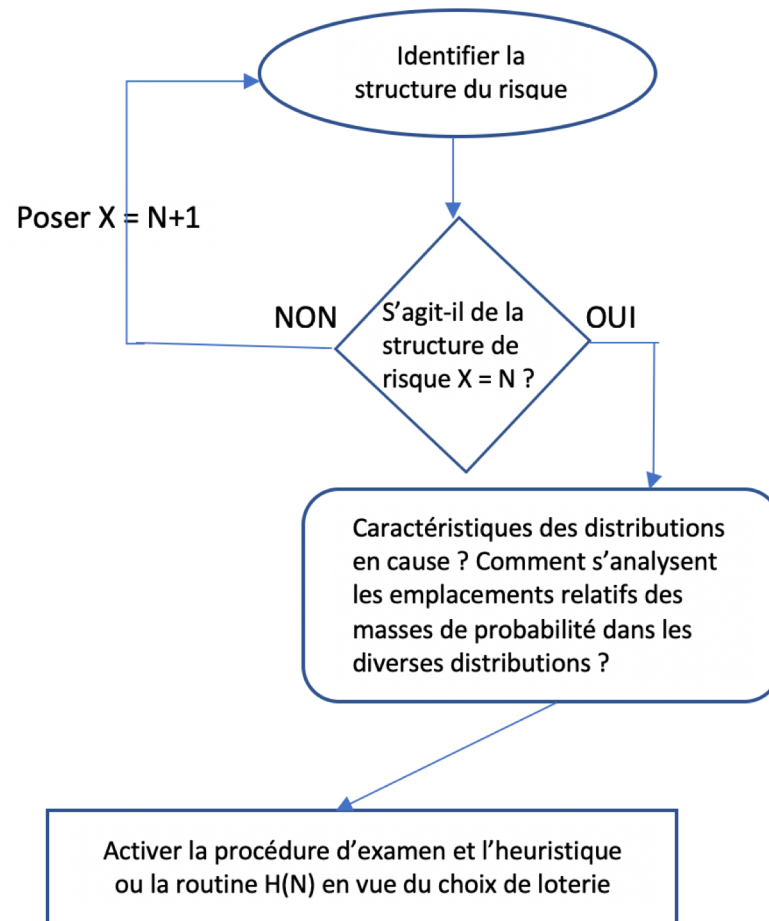
Bertrand Munier, Emergence



13 janvier 2025

Interprétation dynamique du modèle EUDR (Munier, 1998, 2025)

31



Bertrand Munier, Emergence

- Stabilité de l'utilité, variabilité de la transformation de proba...
- **Le modèle EUDR s'insère tout naturellement dans les phases de H. Simon...**
- ... comme dans le mode S2 de Kahneman ou les procédures d'aide au management (séance précédente d'*Émergence*)
- Il n'y a **pas d'opposition nécessaire entre approche complexe et EUDR** mais complémentarité

13 janvier 2025

Ce qu'introduire la complexité peut apporter à l'analyse de la décision

- Aide beaucoup à relativiser le modèle :
 - Quant à son domaine de validité
 - Quant à sa conception-modélisation
 - EUDR : simple arbitrage « rasoir d'Ockham »
- Inflexion du modèle de choix rationnel mais ne signifie pas nécessairement que les décisions ne soient pas optimales *sous les contraintes informationnelles et cognitives* (débat Lesourne avec Munier ≠ J-L. Le Moigne, p.ex.)
- Analyse de la complexité n'est pas une *alternative* à la modélisation, sauf à s'opposer à toute analyse scientifique

La complexité engloberait-elle le cas du risque?

33

Choix économiques individuels non répétés : l'utilité est toujours subjective, la probabilité aussi ($\neq$ combinatoire de Pascal sur de 'petits' montants monétaires)

- Les « biais cognitifs » de Jakob Bernoulli sont un aspect majeur de la question vis-à-vis de l'élicitation des probabilités subjectives, voire de l'utilité personnelle... mais les résultats montrent que l'élicitation est une procédure scientifiquement fondée
- MAIS HYPOTHESE
- ... mais ces résultats dépassent-ils ce seul domaine de la décision dans l'incertain (Enke et Graeber, 2021)... et englobent-ils la décision en avenir stable ou aisément prévisible (Oprea, 2024) ????
- C'est le front de la recherche !.....

***Merci de votre attention et de
l'atmosphère sympathique de cette
réunion d'Emergence !***

Quelques références non ou peu techniques

35

NON TECHNIQUES:

- Jullien, D. et A. Truc, 2024, « **Towards a history of behavioural and experimental economics in France** », *European Journal of the History of Economic Thought*, pp. 1-36. Voir :

<https://shs.hal.science/halsh-04810987v1>

- Munier, B., 2021, « **Penser le risque aujourd'hui, l'apport novateur de Maurice Allais** », *Commentaire*, 176, Hiver 2021-2022, pp. 795-805

https://www.researchgate.net/profile/Bertrand-Munier/publication/356872445_Penser_le_risque_aujourd'hui_l'apport_novateur_de_Maurice_Allais/links/61f032b65779d35951d2f919/Penser-le-risque-aujourd'hui-l'apport-novateur-de-Maurice-Allais.pdf

- Serra, D., 2017, **Economie comportementale**, Paris, Economica, 207p.

<https://hal.science/hal-02072439/>

■ UN BRIN PLUS (MAIS PEU QUAND MÊME!!) TECHNIQUE:

- Munier, B., 2022, « **Sur une importante conjecture historique de Philippe Mongin, Réexamen de l'apport de Maurice allais à la théorie de la décision face au risque** », *Revue Economique*, 73, pp. 921-941.

https://shs.cairn.info/article/RECO_736_0921

■ UN PEU PLUS TECHNIQUE:

- Munier, B., 2018, « **On bespoke decision-aiding under risk : The engineering behind preference elicitation** », *Oxford IMA Journal of Management Mathematics*, 29, pp. 253-273.

<https://academic.oup.com/imaman/article-abstract/29/3/253/2670290?redirectedFrom=fulltext>